Spezielle Funktionen

Hannes Matthias Schlottke

Universität Rostock - Institut für Mathematik

Wintersemester 2024/2025

Gliederung

1 **Spezielle Funktionen**

2 **Die Gammafunktion**

3 **Die Fehlerfunktion**

4 **Die Bessel-Funktionen**

5 **Quellen**

Was ist das?

- Funktionen, die auch in angewandten Wissenschaften Bedeutung erhalten
- keine elementaren Funktionen
  - keine algebraische, trigonometrische, exponentielle oder logarithmische Funktion
  - kann nicht durch algebraische Operationen aus diesen Funktionsarten erhalten werden
- Funktionen stehen in Beziehung zueinander

Einige Beispiele für spezielle Funktionen sind:

- Gammafunktion
- Betafunktion
- Fehlerfunktion
- Bessel-Funktionen
- Dirichlet-Funktion
- Hermitesche Polynome

Die Gammafunktion

- betrachte Exponentialreihe

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{mit} \tag{1}$$

$$n! = \prod_{m=1}^{n} m \tag{2}$$

- Fakultät spielt nicht nur in Exponentialreihe eine Rolle
  $\rightarrow$ will nicht nur Definition über ganzzahlige Werte von n
- wichtigste Eigenschaft der Fakultät:

$$n! = n \cdot (n-1)! \tag{3}$$

- Gammafunktion soll zwei Kriterien erfüllen:

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{4}$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) \qquad \text{für } n \in \mathbb{R} \tag{5}$$

- meist wird Integral als Definition für $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ genutzt:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{6}$$

- mit partieller Integration lassen sich Eigenschaften zeigen

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \int_0^\infty t^1 e^{-t}\,dt = -te^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt \\ &= 0 - e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 = 1! \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt \\ &= x\cdot\Gamma(x)\end{aligned} \tag{8}$$

Definition

- wir erweitern den Definitionsbereich der Funktion $\Gamma : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \to \mathbb{R}$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 = 0! \tag{9}$$

$$\Gamma(0) = (-1)! = \int_0^\infty t^{-1} e^{-t}\,dt = \infty \tag{10}$$

- durch die eingangs geforderte Eigenschaft aus Gleichung (5) erhält man:

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = -\infty \tag{11}$$

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2} = \infty \;\ldots$$

- außerdem gilt der Eulersche Ergänzungssatz:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sin(\pi x)} \tag{12}$$

- nun kann z.B. $\Gamma(\frac{1}{2})$ berechnet werden, $x = \frac{1}{2}$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{13}$$

- Matlabfunktion *gamma*()

komplexe Gammafunktion

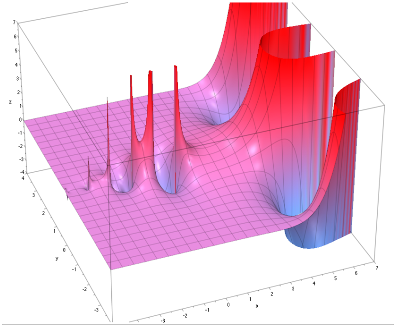

Abbildung 1: Realteil der komplexen Gammafunktion $z = \Re(\Gamma(\tilde{z}))$ [B2]

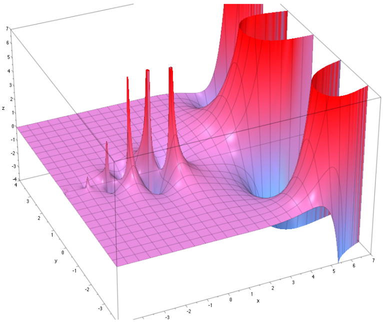

Abbildung 2: Imaginärteil der komplexen Gammafunktion $z = \Im(\Gamma(\tilde{z}))$ [B2]

- sinnvoll für Standardnormalverteilung $X \sim N(0,1)$ mit Dichtefunktion

$$f(x) = N \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{14}$$

- gerade Funktion f muss normiert werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ gilt
- substituiert man $u = \frac{x^2}{2}$, sodass $dx = \frac{1}{\sqrt{2u}}du$, erhält man

$$\frac{1}{2N} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{15}$$

Die Fehlerfunktion

- integriert man die Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ der Standardnormalverteilung für die Verteilungsfunktion, erhält man das Fehlerintegral

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{bzw.} \tag{16}$$

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \tag{17}$$

- durch die Substitution $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ erhält man

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} e^{-u^2}\, du}_{= erf(\frac{z}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{2} erf(\frac{z}{\sqrt{2}}) \tag{18}$$

- Fehlerfunktion ist durch dieses Integral definiert

$$erf(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z} e^{-x^2}\, dx \tag{19}$$

- für Verteilungsfunktion ergibt sich

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(1 + erf(\frac{z}{\sqrt{2}})) \tag{20}$$

- neben *erf*(x) gibt es auch folgende Darstellungen:

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \tag{21}$$

$$erf(a,b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-t^2}\, dt = erf(b) - erf(a) \tag{22}$$

- imaginäre Fehlerfunktion

$$erfi(x) = \frac{erf(ix)}{i} \tag{23}$$

- gaußsche Glockenkurve $g(t) = e^{-t^2}$ lässt sich bei $t_0 = 0$ taylorentwickeln

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0) \cdot t^n}{n!}$$
$$= 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24} - \frac{t^{10}}{120} + \dots \quad (24)$$

- integrieren liefert Näherung für das gesuchte Integral

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^9}{4! \cdot 9} - \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} + \dots \quad (25)$$

- es ergibt sich also für die Fehlerfunktion

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \qquad (26)$$

→ sinnvoll für betragsmäßig kleine reelle Werte

- für größere reelle Werte Kettenbruchdarstellung

$$erf(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-x^2}}{x + \frac{1}{2x + \frac{2}{x + \frac{3}{2x + \dots}}}} \qquad (27)$$

- weitere numerische Berechnungen durch Approximationen oder Entwicklungen
- bspw. durch

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} sgn(x) \sqrt{1 - e^{-x^2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-kx^2} \right) \tag{28}$$

- Reihenentwicklung der imaginären Fehlerfunktion:

$$erfi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \tag{29}$$

- Matlabfunktion *erf*()

Die Bessel-Funktionen

- will man Eigenschwingung einer kreisförmigen Membran berechnen, benötigt man 2-dimensionale Wellengleichung: $U''(x, y, t) = c^2 \cdot \Delta U(x, y, t)$

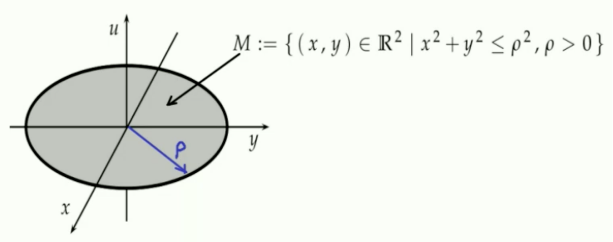

Abbildung 3: kreisförmige Membran in der x-y-Ebene [B1]

Besselche DGL

- nutzt Koordinatentransformation für $\widetilde{U}(r, \varphi, t)$
- Ansatz:

$$\widetilde{U}(r, \varphi, t) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot T(t) \tag{30}$$

- für Radialteil $R(r)$ erhält man DGL, die verallgemeinert so aussieht:

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \lambda^2) y(x) = 0 \tag{31}$$

- Gleichung (31) ist die Besselsche Differentialgleichung

- über Potenzreihenansatz $y(x) = x^\lambda \cdot \sum_{k=0}^\infty a_k \cdot x^k$ erhält man Lösungen für die DGL

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \cdot \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{32}$$

mit $J_\lambda :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

- $J_\lambda(x)$ heißen Bessel-Funktionen erster Art und λ-ter Ordnung

Bessel-Funktionen 2. Art

- Besselsche DGL ist DGL 2. Ordnung
  - $\rightarrow$ gibt 2 linear unabhängige Lösungen

$$Y_\lambda(x) := \frac{cos(\lambda x)J_\lambda(x) - J_{-\lambda}(x)}{sin(\lambda\pi)} \tag{33}$$

$\rightarrow$ heißen Bessel-Funktionen 2. Art und λ-ter Ordnung

- allerdings sind J_λ und $J_{-\lambda}$ nur für nicht-ganzzahlige λ lin. unabhängig
  - $\rightarrow$ für Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ (also auch für ganzzahlige n) definiert man

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \to n} Y_\lambda(x) \tag{34}$$

- Matlabfunktionen *besselj*() und *bessely*()

Abbildung 4: Eigenschwingung der Membran zu bestimmten Zeiten t [B1]

- weitere spezielle Funktionen:
  - Polygamma-Funktionen
  - Barnes'sche G-Funktion
  - Legendre-Polynome
  - Hermitesche Polynome
  - Polylogarithmen
  - Zeta-Funktionen
  - Dirichletsche Lambda-Funktion
  - Dirichletsche Beta-Funktion
  - Pochhammer-Symbol
  - ...

Quellen

[Q1] Finn, John M.: INTRODUCTION TO THE SPECIAL FUNCTIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS with applications to the physical and applied sciences, 13.4.2005

[Q2] N.N. Lebedev: SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS, Prentice-Hall, Inc., 1965

[Q3] Vorlesungsmitschriften „Stochastik für Lehramt“

[Q4] Prof. Dr. Alexander Meister: „Stochastik für LA an Gymnasien und Physiker“(Vorlesungsskript)

[Q5] ⟨https://de.mathworks.com⟩ (letzter Zugriff: 6.1.2025)

[Q6] ⟨https://www.ingmathe.de⟩ (letzter Zugriff: 6.1.2025)

[B1] ⟨https://www.youtube.com/watch?v=ngr-5pTExUA⟩ (letzter Zugriff: 6.1.2025)

[B2] ⟨https://math.stackexchange.com/questions/455306/real-and-imaginary-part-of-gamma-function⟩ (6.1.2025)