

Numerische Werkzeuge

Kurt Frischmuth

Institut für Mathematik der Universität Rostock

15. Oktober 2024

Typische Aufgaben der Numerik betreffen (u. a.):

- Lineare Gleichungssysteme
- Nichtlineare Gleichungssysteme
- Interpolation
- Integration
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- ...

Probleme

Zu beachtende Schwierigkeiten bei der Lösung:

- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen wie erkennen, wie gegebenenfalls behandeln?
- Genauigkeit, Fehleranalyse
- Stabilität
- Effektivität

Oft werden Aufgaben mit suboptimalen Werkzeugen attackiert:

- Gaußalgorithmus (kann gut sein, aber nicht immer)
- Normalgleichungen (Kondition!)
- Eigenwerte über charakteristisches Polynom bestimmen
- Interpolation mit Vandermondesystem
- ODE mit Eulerverfahren oder klassischem Runge-Kutta-Verfahren

Standardmethoden

Statt selbst zu programmieren wird heute meist auf fertige Softwarelösungen zurückgegriffen: (außer bei speziellen Anforderungen)

- Matlab
- Python
- Maple
- Mathematica
- Julia
- Octave
- R
- ...

- Vermeidung von Lizenzgebühren
- Nutzung netzbasierter Dienste

Trotz Verfügbarkeit werden nicht unbedingt und automatisch die besten Methoden eingesetzt – insofern ist es immer noch erstrebenswert einen Überblick über adäquate Werkzeuge zu erlangen und mögliche Schwachpunkte zu kennen.

Warnendes Beispiel

Ein Eigenwertproblem ist zu lösen

- Matrix definieren

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- charakteristisches Polynom aufstellen

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 21\lambda^2 - 20\lambda + 5$$

- Nullstellen finden

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

0.381966012, 2.618033988, 1.381966012, 3.618033988

- Eigenvektoren bestimmen

Endauswertung

Probe

```
d(i)=det(A-r[i]*eye);
d.(1:size(A)[1])
```

```
4-element Vector{Float64}:
 2.155654306723459e-15
 7.145470856672925e-15
 2.5590468321067457e-14
 9.05374808823875e-14
```

3 Eigenvektoren noch einer

```
nullspace(A-r[1]*eye)
```

```
4x1 Matrix{Float64}:
 0.3717480344601843
 0.6015009550075455
 0.601500955007546
 0.3717480344601847
```

```
nullspace(A-r[2]*eye)
```

```
4x0 Matrix{Float64}
```

```
nullspace(A-r[3]*eye)
```

```
4x0 Matrix{Float64}
```

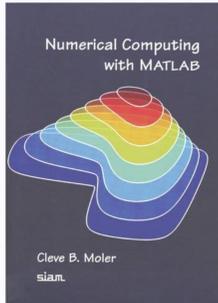
```
nullspace(A-r[4]*eye, atol=1e-13)
```

```
4x1 Matrix{Float64}:
 0.37174803446018445
 -0.6015009550075456
 0.6015009550075457
 -0.37174803446018456
```

Bemerkung (Fazit)

*Auch wenn es funktioniert, kann es (numerisch) grober Unfug sein!
(Wie man es wirklich macht: Thema 13.)*

Als Literaturgrundlage für dieses Seminar soll in fast allen Fällen das Buch *Numerical Computing with Matlab* von Cleve. B. Moler dienen. Dieses ist über die Unibibliothek online verfügbar.



Einige Kapitel sollen aus alternativen Quellen aufbereitet werden (8, 10 und 12).

Der *mit Matlab-Part* darf ignoriert werden.

- Vorabkonsultation (Absprache zum Inhalt)
- Präsentation (L^AT_EX, Beamer-Klasse, kein PowerPoint)
- Eigenständige Lösung von Beispiel zur Illustration (keine Scans oder Screenshots)
- Seminarbericht

Bei Krankheit oder anderen Hinderungsgründen sind Konsultationen wie Teilnahme auch online möglich. Weitere Infos auf alf.math.uni-rostock.de/~kurt/special/anumsem2024w/ Bitte vorher ankündigen!

Es besteht Anwesenheitspflicht – bei zu vielen Fehlterminen erfolgt Streichung.

KF (IfMa UR) NumSem2024 15. Oktober 2024 9 / 13 KF (IfMa UR) NumSem2024 15. Oktober 2024 10 / 13

Termin- und Themenverteilung

1	15.10.2024	Kurt Frischmuth	Einführung
2	22.10.2024	Chantal Haase	Lineare GS
3	29.10.2024	Pia Haberland	Page Rang
4	05.11.2024	Stephan Rudolf Hering	Interpolation
5	12.11.2024	Maria Hessenmüller	Nullstellen
6	19.11.2024	Thea Frenzelein	Quadratmittelprobleme
7	26.11.2024	Lieven Koschwitz	Quadratur
8	03.12.2024	Carsten Ainsworth	ODEs
9	10.12.2024	Eric Westendorf	PDEs
10	17.12.2024	Till Nestke	Satelliten
11	07.01.2025	Jan Pfeiffer	Fourieranalyse
12	14.01.2025	Hannes Schlottke	Spezialfunktionen
13	21.01.2025	Magnus Vergin	EV und SVD
14	28.01.2025	Norris Löbnau	Nadelpeaks

Literatur

- Moler, C. B., *Numerical Computing with Matlab*, SIAM, 2004.
- Deuffhard, P., Hohmann, A., *Numerische Mathematik 1: Eine algorithmisch orientierte Einführung*, Berlin, Boston: De Gruyter, 2019.
- Dennis, J. E., Schnabel, R. B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, (Classics in Applied Mathematics, 16), 1996
- Maeß, G., *Vorlesungen über numerische Mathematik, I. Lineare Algebra*, Birkhäuser Basel, 1984
- Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F., *Numerische Mathematik 1 und 2*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New-York, 2002
- Roos, H. G., Schwetlick H., *Numerische Mathematik: Das Grundwissen für Jedermann*, B. G. Teubner Stuttgart Leipzig, 1999
- Schwarz, H. R., *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner Stuttgart, 1988
- Stoer, J., Bulirsch, R., *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 2002
- Süli, E., Mayers, D. *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003