Partielle Differentialgleichungen

Eric Westendorf

Seminar Numerik

Institut für Mathematik

1. Einführung
   - Überblick über PDEs
   - Lösungen und Herausforderungen
2. Numerische Methoden ODEs (recap)
3. Numerische Methoden PDE
4. Advanced Methods

Definition

Definition

- Gleichungen, die die Beziehung einer Funktion mehrerer veränderlichen zu ihren Ableitungen beschreibt.

Definition

- Gleichungen, die die Beziehung einer Funktion mehrerer veränderlichen zu ihren Ableitungen beschreibt.
- grundlegend für Modellierung physikalischer Probleme (bspw. Hydro, Edyn, Quanten)

Definition

- Gleichungen, die die Beziehung einer Funktion mehrerer veränderlichen zu ihren Ableitungen beschreibt.
- grundlegend für Modellierung physikalischer Probleme (bspw. Hydro, Edyn, Quanten)
- können in der Form dargestellt werden:

$$F\left(x_1, x_2, \dots x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) = 0 \tag{1}$$

Typen von PDEs

[3]

Typen von PDEs

- (besonders) bedeutend sind PDEs der Form

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2}$$

[3]

Typen von PDEs

- (besonders) bedeutend sind PDEs der Form

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2}$$

- $B^2 - AC < 0$ heißen elliptisch

[3]

Typen von PDEs

- (besonders) bedeutend sind PDEs der Form

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2}$$

- $B^2 - AC < 0$ heißen elliptisch
- $B^2 - AC = 0$ heißen parabolisch

[3]

Typen von PDEs

- (besonders) bedeutend sind PDEs der Form

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2}$$

- $B^2 - AC < 0$ heißen elliptisch
- $B^2 - AC = 0$ heißen parabolisch
- $B^2 - AC > 0$ heißen hyperbolisch

[3]

interaktiver Teil

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$
  - hyperbolisch

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$
  - hyperbolisch
- Laplace: $\Delta u = 0$

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$
  - hyperbolisch
- Laplace: $\Delta u = 0$
  - elliptisch

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$
  - hyperbolisch
- Laplace: $\Delta u = 0$
  - elliptisch
- TDSE $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x,t) \right) \psi(x,t)$

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$
  - hyperbolisch
- Laplace: $\Delta u = 0$
  - elliptisch
- TDSE $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x,t) \right) \psi(x,t)$
  - parabolisch

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$
  - hyperbolisch
- Laplace: $\Delta u = 0$
  - elliptisch
- TDSE $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x,t) \right) \psi(x,t)$
  - parabolisch
- TISE $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x)$

interaktiver Teil

- Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$
  - parabolisch
- Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$
  - hyperbolisch
- Laplace: $\Delta u = 0$
  - elliptisch
- TDSE $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x,t)\right)\psi(x,t)$
  - parabolisch
- TISE $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$
  - elliptisch

1. Einführung
   - Überblick über PDEs
   - Lösungen und Herausforderungen
2. Numerische Methoden ODEs (recap)
3. Numerische Methoden PDE
4. Advanced Methods

Produktansatz (bei Physiker*innen sehr beliebt)

Produktansatz (bei Physiker*innen sehr beliebt)

- wir wollen lösen

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x,t) \tag{3}$$

Produktansatz (bei Physiker*innen sehr beliebt)

- wir wollen lösen

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \psi(x,t) \tag{3}$$

- Ansatz: $\psi(x,t) = \phi(x) \cdot \varphi(t)$

$$i\hbar\phi(x)\dot{\varphi}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x)\varphi(t) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \phi(x)\varphi(t) \tag{4}$$

Produktansatz (bei Physiker*innen sehr beliebt)

- wir wollen lösen

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x,t) \tag{3}$$

- Ansatz: $\psi(x,t) = \phi(x)\cdot\varphi(t)$

$$i\hbar\phi(x)\dot{\varphi}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x)\varphi(t) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x)\varphi(t) \tag{4}$$

- umstellen:

$$i\hbar\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \overset{!}{=} E \tag{5}$$

1. Einführung
2. Numerische Methoden ODEs (recap)
3. Numerische Methoden PDE
4. Advanced Methods

Finite Differenzen

Finite Differenzen

- Idee: Darstellung der Ableitung mit zwei Punkten

Finite Differenzen

- Idee: Darstellung der Ableitung mit zwei Punkten
- Euler vorwärts $f_n' = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$

Finite Differenzen

- Idee: Darstellung der Ableitung mit zwei Punkten
- Euler vorwärts $f_n' = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$
- Euler rückwärts $f_n' = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}$

Finite Differenzen

- Idee: Darstellung der Ableitung mit zwei Punkten
- Euler vorwärts $f_n' = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$
- Euler rückwärts $f_n' = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}$
- central difference: $f_n' = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h}$

Finite Differenzen (allgemein)

Finite Differenzen (allgemein)

- Idee: betrachte Taylorreihe an n-ter Stützstelle

$$f_{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} f_n^{(k)} \cdot \frac{(mh)^k}{k!}$$

Finite Differenzen (allgemein)

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
f_{n-2} &= f_n - 2hf_n' + \frac{4h^2}{2}f_n'' - \frac{8\hbar^3}{6}f_n''' + \frac{16h^4}{24}f_n^{(4)} - \frac{32h^5}{120}f_n^{(5)} + \cdots\\
f_{n-1} &= f_n - hf_n' + \frac{h^2}{2}f_n'' - \frac{\hbar^3}{6}f_n''' + \frac{h^4}{24}f_n^{(4)} - \frac{h^5}{120}f_n^{(5)} + \cdots\\
f_n &= f_n\\
f_{n+1} &= f_n + hf_n' + \frac{h^2}{2}f_n'' + \frac{h^3}{6}f_n''' + \frac{h^4}{24}f_n^{(4)} + \frac{h^5}{120}f_n^{(5)} + \cdots\\
f_{n+2} &= f_n + 2hf_n' + \frac{h^2}{2}f_n'' + \frac{8\hbar^3}{6}f_n''' + \frac{16h^4}{24}f_n^{(4)} + \frac{32h^5}{120}f_n^{(5)} + \cdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

finite differences (allgemein)

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d+e)f_n &= 0\\
(-2a-b+d+2e)\hbar f_n' &= f_n'\\
(4a+b+d+4e)\frac{h^2}{2}f_n'' &= 0\\
(-8a-b+d+8e)\frac{h^3 f_n'''}{6} &= 0\\
(16a+b+d+16e)\frac{h^4 f_n^{(4)}}{24} &= 0
\end{aligned}
$$

[5]

Anwendung: DGL

Anwendung: DGL

- expliziter Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$

Anwendung: DGL

- expliziter Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$

Anwendung: DGL

- explizier Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$

Anwendung: DGL

- explizite Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$
- impliziter Euler: $y(t+h) = y(t) + f(t+h, y(t+h))h$

Anwendung: DGL

- explizite Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$
- impliziter Euler: $y(t+h) = y(t) + f(t+h, y(t+h))h$
  - $\alpha = \frac{1}{1-\lambda h}$

Anwendung: DGL

- expliziter Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$
- impliziter Euler: $y(t+h) = y(t) + f(t+h, y(t+h))h$
  - $\alpha = \frac{1}{1-\lambda h}$
  - $-(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \geq 0$

Anwendung: DGL

- expliziter Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$
- impliziter Euler: $y(t+h) = y(t) + f(t+h, y(t+h))h$
  - $\alpha = \frac{1}{1-\lambda h}$
  - $-(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \geq 0$
- Crank-Nicolson: $y(t+h) = y(t) + [f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))]\frac{h}{2}$

Anwendung: DGL

- explizit Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$
- impliziter Euler: $y(t+h) = y(t) + f(t+h, y(t+h))h$
  - $\alpha = \frac{1}{1-\lambda h}$
  - $-(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \geq 0$
- Crank-Nicolson: $y(t+h) = y(t) + [f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))]\frac{h}{2}$
  - $\alpha = \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}$

Anwendung: DGL

- expliziter Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$
- impliziter Euler: $y(t+h) = y(t) + f(t+h, y(t+h))h$
  - $\alpha = \frac{1}{1-\lambda h}$
  - $-(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \geq 0$
- Crank-Nicolson: $y(t+h) = y(t) + [f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))]\frac{h}{2}$
  - $\alpha = \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}$
  - $\lambda + \lambda^* \leq 0$

Anwendung: DGL

- expliziter Euler propagator: $y(t+h) = y(t) + f(t, y(t))h$
  - amplification (Gradmesser $y' = \lambda y; \lambda \leq 0$) $\alpha(h) = \frac{y(t+h)}{y(t)} = (1 + \lambda h)$
  - Stabilität $(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \leq 0$
- impliziter Euler: $y(t+h) = y(t) + f(t+h, y(t+h))h$
  - $\alpha = \frac{1}{1-\lambda h}$
  - $-(\lambda + \lambda^*) + \lambda\lambda^* h \geq 0$
- Crank-Nicolson: $y(t+h) = y(t) + [f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))]\frac{h}{2}$
  - $\alpha = \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}$
  - $\lambda + \lambda^* \leq 0$
  - Interessant: für $\Re\lambda = 0 \Rightarrow |\alpha| = 1$

Stabilität im Bild

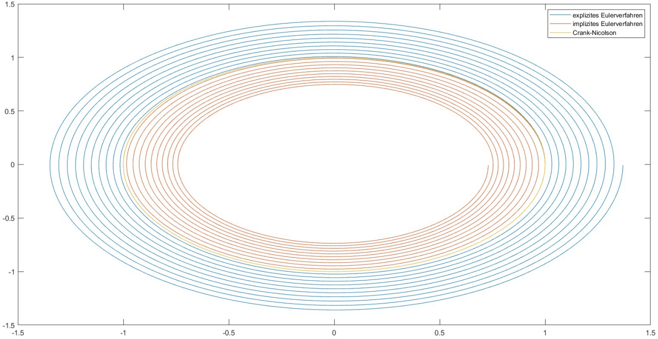

Abbildung 1: Darstellung der Stabilitätseigenschaft

1. Einführung
2. Numerische Methoden ODEs (recap)
3. Numerische Methoden PDE
   - Finite Difference (FDM)
   - Finite Element (FEM)
   - Finite Volume (FVM)
4. Advanced Methods

Idee

[5]

Idee

- ähnlich wie bei ODEs, Darstellung der Ableitungen bzgl. einer Komponente

[5]

Idee

- ähnlich wie bei ODEs, Darstellung der Ableitungen bzgl. einer Komponente
- Zusammensetzung nach bedarf

[5]

Heat-equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha(x,t)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

1. Einführung
2. Numerische Methoden ODEs (recap)
3. Numerische Methoden PDE
   - Finite Difference (FDM)
   - Finite Element (FEM)
   - Finite Volume (FVM)
4. Advanced Methods

Idee

Idee

- Starte mit AWP

Idee

- Starte mit AWP
- multipliziere PDE mit Test-Funktion v

Idee

- Starte mit AWP
- multipliziere PDE mit Test-Funktion v
- Integriere über domain

Idee

- Starte mit AWP
- multipliziere PDE mit Test-Funktion v
- Integriere über domain
- PI verwenden um AWs zu nutzen.

Diskretisierung

Diskretisierung

- unterteile Domain in kleine Elemente (Quadrate, Würfel, n-dim. Polyeder)

Diskretisierung

- unterteile Domain in kleine Elemente (Quadrate, Würfel, n-dim. Polyeder)
- Knoten an den Rändern der Elemente.

Diskretisierung

- unterteile Domain in kleine Elemente (Quadrate, Würfel, n-dim. Polyeder)
- Knoten an den Rändern der Elemente.
- damit hat jedes Element eigen Lösungsapproximation.

Lösungsapproximation mit Polynomen

Lösungsapproximation mit Polynomen

- nutze stückweise Polynome auf den Elementen

Lösungsapproximation mit Polynomen

- nutze stückweise Polynome auf den Elementen
- die Lösung wird dann zusammengesetzt zu

$$u_h(x) = \sum_i U_i \phi_i(x)$$

Umwandelung in ein Gleichungssystem

Umwandelung in ein Gleichungssystem

- LGS $KU = F$

Umwandelung in ein Gleichungssystem

- LGS $KU = F$
  - K=Steifigkeitsmatrix

Umwandelung in ein Gleichungssystem

- LGS $KU = F$
  - K=Steifigkeitsmatrix
  - F=Load vector

Umwandelung in ein Gleichungssystem

- LGS $KU = F$
  - K=Steifigkeitsmatrix
  - F=Load vector
  - U Lösungsvektor

Umwandelung in ein Gleichungssystem

- LGS $KU = F$
  - K=Steifigkeitsmatrix
  - F=Load vector
  - U Lösungsvektor
- Gleichungssystem lösen, fertig :)

Vorteile

[6]

Vorteile

- kann komplexe Geometrien

[6]

Vorteile

- kann komplexe Geometrien
- Flexible Anwendung (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch)

[6]

Vorteile

- kann komplexe Geometrien
- Flexible Anwendung (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch)
- Adaptivität (kann selbst-optimierend implementiert werden)

[6]

Vorteile

- kann komplexe Geometrien
- Flexible Anwendung (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch)
- Adaptivität (kann selbst-optimierend implementiert werden)
- Hohe Akkuratesse mit höhergradigen Polynomen

[6]

Beispiel-Wellengleichung

Beispiel-Wellengleichung

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0; u(x,0) = f(x)$

Beispiel-Wellengleichung

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0; u(x,0) = f(x)$
- Überführung in Schwache Form:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v(x) dx = c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x) dx$$

Beispiel-Wellengleichung

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0; u(x,0) = f(x)$
- Überführung in Schwache Form:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v(x) dx = c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x) dx$$

- PI durchführen und Randwerte einsetzen

$$c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x) dx = -c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 0$$

Beispiel-Wellengleichung

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0; u(x,0) = f(x)$
- Überführung in Schwache Form:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v(x) dx = c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x) dx$$

- PI durchführen und Randwerte einsetzen

$$c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x) dx = -c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 0$$

- Diskretisieren: $M \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + KU^n = F^n$

1. Einführung
2. Numerische Methoden ODEs (recap)
3. Numerische Methoden PDE
   - Finite Difference (FDM)
   - Finite Element (FEM)
   - Finite Volume (FVM)
4. Advanced Methods

Idee

Idee

- Diskretisierung eines Problems auf einem Netz von Kontrollvolumen (Zellen)

Idee

- Diskretisierung eines Problems auf einem Netz von Kontrollvolumen (Zellen)
- Integrierung der PDEs über jedes Kontrollvolumen und verwendet Flüsse an den Grenzen der Volumina

Diskretisierung

Diskretisierung

- Das Gebiet wird in Kontrollvolumen unterteilt, die ein Gitter oder Netz bilden

Diskretisierung

- Das Gebiet wird in Kontrollvolumen unterteilt, die ein Gitter oder Netz bilden
- Jeder Knoten oder jede Zelle im Netz hat ein Kontrollvolumen, das durch die Kanten oder Flächen der benachbarten Zellen begrenzt wird

Erhaltungsgesätze

Erhaltungsgesätze

- FVM basiert auf der Integralform der PDE, z.B. für die Wärmeleitung oder Strömungsgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u dV + \int_S \vec{F}\vec{n} dA = 0$$

Erhaltungsgesätze

- FVM basiert auf der Integralform der PDE, z.B. für die Wärmeleitung oder Strömungsgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u dV + \int_S \vec{F}\vec{n} dA = 0$$

  - V Kontrollvolumen
  - S Oberfläche
  - $\vec{F}$ Fluss (z.B. Wärmefluss, Geschwindigkeit)
  - $\vec{n}$ Normalenvektor

Flussberechung

Flussberechung

- Der Fluss durch die Grenzen eines Kontrollvolumens wird meist durch eine Schätzung oder Approximation (z.B. Upwind-Scheme, Zentralscheiben) berechnet

Flussberechung

- Der Fluss durch die Grenzen eines Kontrollvolumens wird meist durch eine Schätzung oder Approximation (z.B. Upwind-Scheme, Zentralscheiben) berechnet
- In vielen Fällen werden die Flüsse an den Kanten durch numerische Verfahren wie die Linearisierung von Gradienten oder Mittelpunktsverfahren berechnet

Vor-und Nachteile

[4]

Vor-und Nachteile

- FVM ist besonders gut für Probleme geeignet, bei denen es um Flüsse geht (z.B. Strömungsmechanik, Wärmeübertragung).

[4]

Vor-und Nachteile

- FVM ist besonders gut für Probleme geeignet, bei denen es um Flüsse geht (z.B. Strömungsmechanik, Wärmeübertragung).
- garantiert erhaltung von größen

[4]

Vor-und Nachteile

- FVM ist besonders gut für Probleme geeignet, bei denen es um Flüsse geht (z.B. Strömungsmechanik, Wärmeübertragung).
- garantiert erhaltung von größen
- gut für nicht equidistante grids

[4]

Vor-und Nachteile

- FVM ist besonders gut für Probleme geeignet, bei denen es um Flüsse geht (z.B. Strömungsmechanik, Wärmeübertragung).
- garantiert erhaltung von größen
- gut für nicht equidistante grids
- schlecht bei hohen dimensionen und extremen nichtlinearen Problemen

[4]

Beispiel: Diffusion

Vergleich: FDM, FEM, FVM

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern
  - Vorteile: Einfach zu implementieren und zu verstehen

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern
  - Vorteile: Einfach zu implementieren und zu verstehen
  - Nachteile: Weniger gut bei komplexen Geometrien und für unstrukturierte Gitter

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern
  - Vorteile: Einfach zu implementieren und zu verstehen
  - Nachteile: Weniger gut bei komplexen Geometrien und für unstrukturierte Gitter
- FEM (Finite Element Method)

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern
  - Vorteile: Einfach zu implementieren und zu verstehen
  - Nachteile: Weniger gut bei komplexen Geometrien und für unstrukturierte Gitter
- FEM (Finite Element Method)
  - Prinzip: Zerlegung der Problemdomäne in kleine, einfache Elemente, und Approximation der Lösung mit stückweise definierten Funktionen

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern
  - Vorteile: Einfach zu implementieren und zu verstehen
  - Nachteile: Weniger gut bei komplexen Geometrien und für unstrukturierte Gitter
- FEM (Finite Element Method)
  - Prinzip: Zerlegung der Problemdomäne in kleine, einfache Elemente, und Approximation der Lösung mit stückweise definierten Funktionen
  - Einsatzgebiet: Besonders geeignet für komplexe Geometrien und unregelmäßige Domänen, z.B. bei Festkörpermechanik, Thermodynamik und Elektromagnetismus

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern
  - Vorteile: Einfach zu implementieren und zu verstehen
  - Nachteile: Weniger gut bei komplexen Geometrien und für unstrukturierte Gitter
- FEM (Finite Element Method)
  - Prinzip: Zerlegung der Problemdomäne in kleine, einfache Elemente, und Approximation der Lösung mit stückweise definierten Funktionen
  - Einsatzgebiet: Besonders geeignet für komplexe Geometrien und unregelmäßige Domänen, z.B. bei Festkörpermechanik, Thermodynamik und Elektromagnetismus
  - Vorteile: Hohe Flexibilität bei komplexen geometrischen und physikalischen Problemen; Unterstützung für adaptative Gitter und höhere Genauigkeit

Vergleich: FDM, FEM, FVM

- FDM (Finite Difference Method)
  - Prinzip: Näherung der Ableitungen durch Finite Differenzen
  - Einsatzgebiet: Vorzugsweise bei einfachen, strukturierten Gitterproblemen, z.B. bei der Lösung von PDEs auf regelmäßigen Gittern
  - Vorteile: Einfach zu implementieren und zu verstehen
  - Nachteile: Weniger gut bei komplexen Geometrien und für unstrukturierte Gitter
- FEM (Finite Element Method)
  - Prinzip: Zerlegung der Problemdomäne in kleine, einfache Elemente, und Approximation der Lösung mit stückweise definierten Funktionen
  - Einsatzgebiet: Besonders geeignet für komplexe Geometrien und unregelmäßige Domänen, z.B. bei Festkörpermechanik, Thermodynamik und Elektromagnetismus
  - Vorteile: Hohe Flexibilität bei komplexen geometrischen und physikalischen Problemen; Unterstützung für adaptative Gitter und höhere Genauigkeit
  - Nachteile: Höherer Implementierungsaufwand, insbesondere bei der Lösung großer, komplexer Systeme

Vergleich FDM, FEM, FVM

Vergleich FDM, FEM, FVM

- FVM (Finite Volume Method)

Vergleich FDM, FEM, FVM

- FVM (Finite Volume Method)
  - Prinzip: Diskretisierung durch Volumen, Integration der PDEs über Kontrollvolumen und Berechnung der Flüsse an den Kanten

Vergleich FDM, FEM, FVM

- FVM (Finite Volume Method)
  - Prinzip: Diskretisierung durch Volumen, Integration der PDEs über Kontrollvolumen und Berechnung der Flüsse an den Kanten
  - Einsatzgebiet: Besonders geeignet für Strömungsmechanik, Wärmeübertragung und andere Probleme mit Erhaltungsgesetzen

Vergleich FDM, FEM, FVM

- FVM (Finite Volume Method)
    - Prinzip: Diskretisierung durch Volumen, Integration der PDEs über Kontrollvolumen und Berechnung der Flüsse an den Kanten
    - Einsatzgebiet: Besonders geeignet für Strömungsmechanik, Wärmeübertragung und andere Probleme mit Erhaltungsgesetzen
    - Vorteile: Garantierte Erhaltung von Größen (z.B. Masse, Energie); gut geeignet für nicht-equidistante Gitter und schwierige Randbedingungen

Vergleich FDM, FEM, FVM

- FVM (Finite Volume Method)
  - Prinzip: Diskretisierung durch Volumen, Integration der PDEs über Kontrollvolumen und Berechnung der Flüsse an den Kanten
  - Einsatzgebiet: Besonders geeignet für Strömungsmechanik, Wärmeübertragung und andere Probleme mit Erhaltungsgesetzen
  - Vorteile: Garantierte Erhaltung von Größen (z.B. Masse, Energie); gut geeignet für nicht-equidistante Gitter und schwierige Randbedingungen
  - Nachteile: Komplexere Implementierung als FDM; Probleme bei sehr hohen Dimensionen oder extremen nichtlinearen Problemen

Idee

Idee

- Darstellung der Lösung als eine Summe von Basisfunktionen(z.B. Fourrierreihe)

Idee

- Darstellung der Lösung als eine Summe von Basisfunktionen(z.B. Fourrierreihe)
- basiert auf der Transformation des Problems in den Fourier- oder Funktionsraum

Idee

- Darstellung der Lösung als eine Summe von Basisfunktionen(z.B. Fourrierreihe)
- basiert auf der Transformation des Problems in den Fourier- oder Funktionsraum
- also: $u(x,t) = \sum_n c_n(t)\phi_n(x)$

Idee

- Darstellung der Lösung als eine Summe von Basisfunktionen(z.B. Fourrierreihe)
- basiert auf der Transformation des Problems in den Fourier- oder Funktionsraum
- also: $u(x, t) = \sum_n c_n(t)\phi_n(x)$
- Fourier: $\phi_n(x)$ Sinus und Cosinus

Idee

- Darstellung der Lösung als eine Summe von Basisfunktionen(z.B. Fourrierreihe)
- basiert auf der Transformation des Problems in den Fourier- oder Funktionsraum
- also: $u(x,t) = \sum_n c_n(t)\phi_n(x)$
- Fourier: $\phi_n(x)$ Sinus und Cosinus
- Chebyshev: polynomial

Vor- und Nachteile der Spectral Method

[1]

Vor- und Nachteile der Spectral Method

- Hohe Genauigkeit

[1]

Vor- und Nachteile der Spectral Method

- Hohe Genauigkeit
- Schnelle Konvergenz

[1]

Vor- und Nachteile der Spectral Method

- Hohe Genauigkeit
- Schnelle Konvergenz
- Einfach implementierbar

[1]

Vor- und Nachteile der Spectral Method

- Hohe Genauigkeit
- Schnelle Konvergenz
- Einfach implementierbar
- Ungeeignet für nicht-glatte Lösungen

[1]

Vor- und Nachteile der Spectral Method

- Hohe Genauigkeit
- Schnelle Konvergenz
- Einfach implementierbar
- Ungeeignet für nicht-glatte Lösungen
- Globale Basisfunktionen nötig

[1]

Vor- und Nachteile der Spectral Method

- Hohe Genauigkeit
- Schnelle Konvergenz
- Einfach implementierbar
- Ungeeignet für nicht-glatte Lösungen
- Globale Basisfunktionen nötig
- Für nicht-periodische Randbedingungen kann es schwierig sein, geeignete Basisfunktionen zu finden, die die Randbedingungen exakt einhalten.

[1]

Discontinuous Galerkin (DG) Method

Discontinuous Galerkin (DG) Method

- Prinzip: Mischung aus FEM und FVM; diskontinuierliche Approximationen der Lösung auf den Elementen der Domäne, Integrationen stückweise.

Discontinuous Galerkin (DG) Method

- Prinzip: Mischung aus FEM und FVM; diskontinuierliche Approximationen der Lösung auf den Elementen der Domäne, Integrationen stückweise.
- Einsatzgebiet: Besonders nützlich für nichtlineare Probleme, wie in der Strömungsmechanik oder Magnetohydrodynamik.

Discontinuous Galerkin (DG) Method

- Prinzip: Mischung aus FEM und FVM; diskontinuierliche Approximationen der Lösung auf den Elementen der Domäne, Integrationen stückweise.
- Einsatzgebiet: Besonders nützlich für nichtlineare Probleme, wie in der Strömungsmechanik oder Magnetohydrodynamik.
- Vorteile: Hohe Flexibilität bei der Diskretisierung komplexer Geometrien und für Probleme mit nicht-glatten Lösungen.

Discontinuous Galerkin (DG) Method

- Prinzip: Mischung aus FEM und FVM; diskontinuierliche Approximationen der Lösung auf den Elementen der Domäne, Integrationen stückweise.
- Einsatzgebiet: Besonders nützlich für nichtlineare Probleme, wie in der Strömungsmechanik oder Magnetohydrodynamik.
- Vorteile: Hohe Flexibilität bei der Diskretisierung komplexer Geometrien und für Probleme mit nicht-glatten Lösungen.
- Nachteile: Höhere Rechenkosten und größere Komplexität bei der Implementierung im Vergleich zu klassischen Methoden wie FDM oder FEM.

Meshless Methods: SPH

Meshless Methods: SPH

- Prinzip: Lösung der PDEs ohne Gitter durch Partikel, die physikalische Größen tragen. Jeder Partikel informiert über den Zustand seiner Umgebung.

Meshless Methods: SPH

- Prinzip: Lösung der PDEs ohne Gitter durch Partikel, die physikalische Größen tragen. Jeder Partikel informiert über den Zustand seiner Umgebung.
- Einsatzgebiet: Besonders nützlich für Probleme mit freien Oberflächen, wie Flüssigkeitsdynamik oder Astrophysik.

Meshless Methods: SPH

- Prinzip: Lösung der PDEs ohne Gitter durch Partikel, die physikalische Größen tragen. Jeder Partikel informiert über den Zustand seiner Umgebung.
- Einsatzgebiet: Besonders nützlich für Probleme mit freien Oberflächen, wie Flüssigkeitsdynamik oder Astrophysik.
- Vorteile: Keine Gitter nötig, ideal für bewegende Grenzflächen oder deformierbare Geometrien.

Meshless Methods: SPH

- Prinzip: Lösung der PDEs ohne Gitter durch Partikel, die physikalische Größen tragen. Jeder Partikel informiert über den Zustand seiner Umgebung.
- Einsatzgebiet: Besonders nützlich für Probleme mit freien Oberflächen, wie Flüssigkeitsdynamik oder Astrophysik.
- Vorteile: Keine Gitter nötig, ideal für bewegende Grenzflächen oder deformierbare Geometrien.
- Nachteile: Hohe Rechenkosten, komplexe Implementierung.

Lattice Boltzmann Method (LBM)

Lattice Boltzmann Method (LBM)

- Prinzip: Lösung der diskreten Boltzmann-Gleichung, die Mikroskopie von Fluids beschreibt. Simulation über ein Gitter.

Lattice Boltzmann Method (LBM)

- Prinzip: Lösung der diskreten Boltzmann-Gleichung, die Mikroskopie von Fluids beschreibt. Simulation über ein Gitter.
- Einsatzgebiet: Strömungsmechanik, besonders für komplexe Geometrien und Mehrphasenströmungen.

Lattice Boltzmann Method (LBM)

- Prinzip: Lösung der diskreten Boltzmann-Gleichung, die Mikroskopie von Fluids beschreibt. Simulation über ein Gitter.
- Einsatzgebiet: Strömungsmechanik, besonders für komplexe Geometrien und Mehrphasenströmungen.
- Vorteile: Gut geeignet für Strömungsprobleme, basiert auf mikroskopischen Prozessen.

Lattice Boltzmann Method (LBM)

- Prinzip: Lösung der diskreten Boltzmann-Gleichung, die Mikroskopie von Fluids beschreibt. Simulation über ein Gitter.
- Einsatzgebiet: Strömungsmechanik, besonders für komplexe Geometrien und Mehrphasenströmungen.
- Vorteile: Gut geeignet für Strömungsprobleme, basiert auf mikroskopischen Prozessen.
- Nachteile: Höhere Komplexität als klassische FDM; Schwierigkeiten bei hohen Dimensionen.

Boundary Element Method (BEM)

Boundary Element Method (BEM)

- Prinzip: Reduziert das Problem auf die Randflächen der Domäne; Dimension des Problems halbiert.

Boundary Element Method (BEM)

- Prinzip: Reduziert das Problem auf die Randflächen der Domäne; Dimension des Problems halbiert.
- Einsatzgebiet: Effektiv bei unendlichen oder halb-unendlichen Domänen wie Akustik, Elektromagnetismus, Elastizität.

Boundary Element Method (BEM)

- Prinzip: Reduziert das Problem auf die Randflächen der Domäne; Dimension des Problems halbiert.
- Einsatzgebiet: Effektiv bei unendlichen oder halb-unendlichen Domänen wie Akustik, Elektromagnetismus, Elastizität.
- Vorteile: Geringerer Rechenaufwand, da nur Randbedingungen gelöst werden.

Boundary Element Method (BEM)

- Prinzip: Reduziert das Problem auf die Randflächen der Domäne; Dimension des Problems halbiert.
- Einsatzgebiet: Effektiv bei unendlichen oder halb-unendlichen Domänen wie Akustik, Elektromagnetismus, Elastizität.
- Vorteile: Geringerer Rechenaufwand, da nur Randbedingungen gelöst werden.
- Nachteile: Eingeschränkt auf Probleme mit Randbedingungen, schwierig bei nichtlinearen Problemen oder komplexen Geometrien.

Multigrid Methods

Multigrid Methods

- Prinzip: Kombination von schnellen und langsamen Iterationen auf mehreren Auflösungsebenen zur Beschleunigung.

Multigrid Methods

- Prinzip: Kombination von schnellen und langsamen Iterationen auf mehreren Auflösungsebenen zur Beschleunigung.
- Einsatzgebiet: Elliptische Probleme wie Poisson-Gleichung, Wärmeleitung.

Multigrid Methods

- Prinzip: Kombination von schnellen und langsamen Iterationen auf mehreren Auflösungsebenen zur Beschleunigung.
- Einsatzgebiet: Elliptische Probleme wie Poisson-Gleichung, Wärmeleitung.
- Vorteile: Sehr schnelle Konvergenz bei großskaligen Problemen.

Multigrid Methods

- Prinzip: Kombination von schnellen und langsamen Iterationen auf mehreren Auflösungsebenen zur Beschleunigung.
- Einsatzgebiet: Elliptische Probleme wie Poisson-Gleichung, Wärmeleitung.
- Vorteile: Sehr schnelle Konvergenz bei großskaligen Problemen.
- Nachteile: Komplexe Implementierung, erfordert geeignete Mehrgitterstruktur.

Adaptive Mesh Refinement (AMR)

[2]

Adaptive Mesh Refinement (AMR)

- Prinzip: Dynamische Verfeinerung des Gitters in Bereichen mit hohen Gradientenänderungen.

[2]

Adaptive Mesh Refinement (AMR)

- Prinzip: Dynamische Verfeinerung des Gitters in Bereichen mit hohen Gradientenänderungen.
- Einsatzgebiet: Fluiddynamik, Magnetohydrodynamik, Astrophysik, Probleme mit lokal komplexen Lösungen.

[2]

Adaptive Mesh Refinement (AMR)

- Prinzip: Dynamische Verfeinerung des Gitters in Bereichen mit hohen Gradientenänderungen.
- Einsatzgebiet: Fluiddynamik, Magnetohydrodynamik, Astrophysik, Probleme mit lokal komplexen Lösungen.
- Vorteile: Effizient, da nur in relevanten Bereichen hohe Auflösung verwendet wird.

[2]

Adaptive Mesh Refinement (AMR)

- Prinzip: Dynamische Verfeinerung des Gitters in Bereichen mit hohen Gradientenänderungen.
- Einsatzgebiet: Fluiddynamik, Magnetohydrodynamik, Astrophysik, Probleme mit lokal komplexen Lösungen.
- Vorteile: Effizient, da nur in relevanten Bereichen hohe Auflösung verwendet wird.
- Nachteile: Erfordert effizienten Verfeinerungsalgorithmus, erhöhte Komplexität.

[2]

Fluid Dynamics

Fluid Dynamics

- Navier-Stokes-Gleichung

Fluid Dynamics

- Navier-Stokes-Gleichung
- Anwendungen: Wetter, Aerodynamik, Ozeanographie

Fluid Dynamics

- Navier-Stokes-Gleichung
- Anwendungen: Wetter, Aerodynamik, Ozeanographie
- Methoden:

Fluid Dynamics

- Navier-Stokes-Gleichung
- Anwendungen: Wetter, Aerodynamik, Ozeanographie
- Methoden:
  - FVM

Fluid Dynamics

- Navier-Stokes-Gleichung
- Anwendungen: Wetter, Aerodynamik, Ozeanographie
- Methoden:
    - FVM
    - FDM

Fluid Dynamics

- Navier-Stokes-Gleichung
- Anwendungen: Wetter, Aerodynamik, Ozeanographie
- Methoden:
  - FVM
  - FDM
  - Spectral

QM und QFT

QM und QFT

- Schrödingergleichung, Klein-Gordon, Maxwell, Dirac

QM und QFT

- Schrödingergleichung, Klein-Gordon, Maxwell, Dirac
- Methoden:

QM und QFT

- Schrödingergleichung, Klein-Gordon, Maxwell, Dirac
- Methoden:
  - FEM

QM und QFT

- Schrödingergleichung, Klein-Gordon, Maxwell, Dirac
- Methoden:
  - FEM
  - FDM

QM und QFT

- Schrödingergleichung, Klein-Gordon, Maxwell, Dirac
- Methoden:
  - FEM
  - FDM
  - Spectral

Elektrodynamik

Elektrodynamik

- Maxwell-Gleichungen

Elektrodynamik

- Maxwell-Gleichungen
- Methoden:

Elektrodynamik

- Maxwell-Gleichungen
- Methoden:
  - Finite Difference Time Domain (FDTD)

Elektrodynamik

- Maxwell-Gleichungen
- Methoden:
  - Finite Difference Time Domain (FDTD)
  - FEM

Wärmetransfer, Diffusion

Wärmetransfer, Diffusion

- Wärmeleitungsgleichung, Diffusionsgleichung, Konvektions-Diffusions-Gleichung

Wärmetransfer, Diffusion

- Wärmeleitungsgleichung, Diffusionsgleichung, Konvektions-Diffusions-Gleichung
- Methoden:

Wärmetransfer, Diffusion

- Wärmeleitungsgleichung, Diffusionsgleichung, Konvektions-Diffusions-Gleichung
- Methoden:
  - FDM

Wärmetransfer, Diffusion

- Wärmeleitungsgleichung, Diffusionsgleichung, Konvektions-Diffusions-Gleichung
- Methoden:
  - FDM
  - FVM

Astrophysik

Astrophysik

- Einstein-Feldgleichungen, Hydrodynamik, MHD

Astrophysik

- Einstein-Feldgleichungen, Hydrodynamik, MHD
- Methoden:

Astrophysik

- Einstein-Feldgleichungen, Hydrodynamik, MHD
- Methoden:
  - FVM

Astrophysik

- Einstein-Feldgleichungen, Hydrodynamik, MHD
- Methoden:
  - FVM
  - Spectral

Astrophysik

- Einstein-Feldgleichungen, Hydrodynamik, MHD
- Methoden:
  - FVM
  - Spectral
  - SPH

Quellen

[1] C. Canuto. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer, 2006.

[2] S. C. Chapra und P. M. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, 2015.

[3] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.

[4] W. Malalasekera H.K. Versteeg. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education, 2007.

[5] R.J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2007.

[6] J.Z. Zhu O.C. Zienkiewicz R.L. Taylor. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, 2013.