Lineare Gleichungssysteme

Chantal Haase

Universität Rostock

22.10.2024

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung
   - Lineare Gleichungssysteme in der Numerik
   - Lineare Gleichungssysteme lösen
2. Beispiel
   - Kontrollrechnung
3. Permutationsmatrix und Dreiecksmatrizen
   - Permutationsmatrix
   - Dreiecksmatrizen
4. Gaußsches Eliminationsverfahren
5. Rundungsfehler
   - Rundungsfehler - Beispiel
   - Grafik
6. Konditionszahlen
   - Norm
   - Beispiel
7. Fazit
8. Quellen

Lineare Gleichungssysteme in der Numerik

- treten in wissenschaftlichen und ingenieurtechnischen Anwendungen auf
- Gleichungen, die linear voneinander unabhängig sind
- enthalten gesuchte Variablen, die so zu lösen sind, dass alle Gleichungen erfüllt sind

Lineare Gleichungssysteme in der Numerik

- Ziel: Effizientes Lösen der Gleichungssysteme
- oft sehr groß oder spezielle Eigenschaften wie:

  - Singularität

  - schlecht konditionierte Koeffizientenmatrizen

Satz von Kronecker-Cappelli

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$
- Gleichungssytem nicht lösbar, wenn $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$

Gebrauchsbeispiele

- (Brücken-)Konstruktionen

  $\rightarrow$ Spannung und Verformung durch Wind, Belastung und Erdbeben

- Optimierung von Verkehrsflüssen

  $\rightarrow$ Vorhersage des Verkehrs $\rightarrow$ Ampelphasen/Routen anpassen

Lineare Gleichungssysteme lösen

- berechnen von x mit der Inversen von A
- $x = A^{-1}$ b $\rightarrow$ **nicht nutzen!**

Beispiel

$x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 5$

$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1x_4 = 7$

$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10$

$4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 12$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Beispiel

- Eliminierung unter dem ersten Pivotelement:

  - erste Zeile *(-1) zur zweiten Zeile addieren, etc.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

- Pivotisierung: 2. und 4. Zeile tauschen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- Verfahren fortsetzen

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel - Einsetzen

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 5$$

$$8x_2 - 8x_4 = -8$$

$$x_3 - x_4 = 1$$

$$x_4 = 2$$

Beispiel - Ergebnis

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel - Kontrollrechnung

- $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Permutationsmatrix

$\rightarrow$ **Einheitsmatrix mit vertauschten Zeilen und Spalten**

- Beispiel:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $p = [1\ 4\ 2\ 3]$

$\texttt{P*A} = \texttt{A(p,:)}$

Permutationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A*P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Permutationsmatrix und Dreiecksmatrix

- Matrix A definieren mit:

  ```
  restart; with(LinearAlgebra);
  ```

  ```
  A := Matrix([[1, 0, 1, 2], [1, 2, 3, -1], [2, 1, 3, 2],
  [4, 8, 4, 0]]);
  ```

- `P, L, U:= LUDecomposition(A);`

  $\rightarrow$ Ausgabe der verschiedenen Matrizen

Dreiecksmatrizen

- Obere Dreiecksmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Untere Dreiecksmatrix:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/8 & 1 & 0 \\ 1 & 1/4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- L*U = P*A

Bedeutung der Permutations- und Dreiecksmatrizen

- **Permutationsmatrix:** Nichttauschen der Zeilen $\rightarrow$ Instablilität, Rundungsfehlern
- **Untere Dreiecksmatrix:** ohne Pivotisierung $\rightarrow$ Rundungsfehler
- **Obere Dreiecksmatrix:** wenn fehlerhaft $\rightarrow$ x-Werte fehlerhaft

Gaußsches Eliminationsverfahren

- zwei bedeutende Aspekte

  - Pivotsuche

  - Auswirkung von Rundungsfehlern

- Vorwärtselimination

- Rücksubstitution

Rundungsfehler

= minimale Abweichung des theoretischen Ergebnisses:

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$

- treten bei Verwendung von Dezimalzahlen auf $\rightarrow$ endliche Anzahl von Ziffern $\Rightarrow$ ungenau
- error: e = x - x_*
- rest: r = b - Ax_*

Rundungsfehler

$$\begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

- 1. Partielle Pivotisierung

$$\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.217 \end{pmatrix}$$

- 2. Multiplikator ausrechnen:

$\frac{0.780}{0.913} = 0.854$

Rundungsfehler

$$\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$x_* = \begin{pmatrix} -0.443 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Rundungsfehler

$$r = b - Ax_* = \begin{pmatrix} 0.217 - ((0.780)(-0.443) + (0.563)(1.000)) \\ 0.254 - ((0.913)(-0.443) + (0.659)(1.000) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.000460 \\ -0.000541 \end{pmatrix}$$

Rundungsfehler

$$\begin{pmatrix} 0.913000 & 0.659000 \\ 0 & 0.000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254000 \\ 0.000001 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.000000 \\ -1.000000 \end{pmatrix}$$

Rundungsfehler

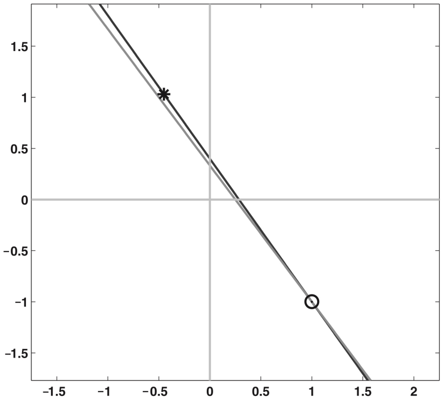

Abbildung: Graphische Darstellung des Rundungsfehlers

Konditionszahlen

- Sensitivität einer Funktion oder eines Problems
- kleine Unterschiede in Eingangsdaten
- $Ax = b \rightarrow \kappa(A)$ Einfluss auf x
- hohe Werte für $\kappa(A)$ sorgen für große Änderungen von x bei minimaler Variation von A

Konditionszahlen - Beispiel

- gut konditioniert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- schlecht konditioniert:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Konditionszahlen - Beispiel

- $\kappa(\mathrm{A}) = 1$

  $\rightarrow$ präzise Ergebnisse; stabil

- $\kappa(\mathrm{H}) = 524$

  $\rightarrow$ anfällig für große Fehler

Konditionszahlen

- A fast singulär $\rightarrow$ große Änderungen in x zu erwarten
- A nah an der Einheitsmatrix $\rightarrow$ geringe Änderungen in x zu erwarten
- Mittel: Norm eines Vektors $\rightarrow$ misst die Größe der Elemente des Vektors

Norm

- $||x||_1 =$ Summe der absoluten Werte der Elemente
- $||x||_2 =$ Quadratwurzel der Summe der quadrierten Elemente
- $||x||_\infty =$ Maximum der absoluten Werte der Elemente

Relation - Norm und Konditionszahl

- $\kappa(\mathrm{A}) = \frac{M}{m}$
- $\mathrm{M} = \max \frac{||Ax||}{||x||}$
- $\mathrm{m} = \min \frac{||Ax||}{||x||}$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 5.8 & 7.8 \\ 8.7 & 1.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.8 \\ 8.7 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

- minimale Änderung von b zu $\tilde{b}$

$$b = \begin{pmatrix} 5.8 \\ 8.7 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5.82 \\ 8.71 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 8.7 & 1.6 \\ 0 & 6.73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.82 \\ 4.83 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{4.83}{6.71} = 0.72$$

$$x_1 = \frac{5.82 - (7.8 * 0.72)}{5.8} = 0.03$$

Beispiel

$$b = \begin{pmatrix} 5.8 \\ 8.7 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5.82 \\ 8.71 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0.03 \\ 1.69 \end{pmatrix}$$

Beispiel

- l_1 - Norm:
- δb = b - $\tilde{\text{b}}$ und δx = x - $\tilde{\text{x}}$
- $\delta b = \begin{pmatrix} 5.8 \\ 8.7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5.82 \\ 8.71 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix}$
- $||\delta b|| = 0.03$
- $\delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97 \\ -0.72 \end{pmatrix}$
- $||\delta x|| = 1.69$

Beispiel

- Relative Änderungsrate:
- $\frac{||\delta b||}{||b||} = \frac{0.03}{14.5} = 0.002069$
- $\frac{||\delta x||}{||x||} = \frac{1.69}{1} = 1.69$
- $\kappa(A) = \frac{1.69}{0.002069} = 816.8$

  $\rightarrow$ numerisch instabil

Fazit

- Rundungsfehler sind unvermeidbar $\rightarrow$ durch numerische Verfahren minimierbar

- numerische Stabilität durch Pivotisierung

- Alternative:

  - Gauß-Seidel Verfahren

  $\rightarrow$ verbessert Lösung schrittweise $\rightarrow$ der Genauigkeit wird sich angenähert

  $\rightarrow$ ersetzt Methoden, die aufgrund von mangelndem Speicherplatz und Komplexität nicht anzuwenden sind

Gauß-Seidel-Verfahren

- Startvektor als Näherung
- Durchlauf aller Gleichungen $\rightarrow$ Vektor anpassen
- Wiederholen des Vorgangs bis die Lösungen konvergieren oder die Anzahl der festegesetzten Iterationen erreicht ist

  $\rightarrow$ bietet Flexibilität und Effizienz

Quellen

- Freistetter, F. (2024, 12. Februar). Ein Theorem für Faule. spektrum.de. https://www.spektrum.de/kolumne/satz-von-kronecker-capelli-ein-theorem-fuer-faule/
- Gauß-Seidel-Verfahren: Anwendung und Vorteile — StudySmarter. (o.D.). StudySmarter. https://www.studysmarter.de/studium/mathematik-studium/numerik/gauss-seidel-verfahren/
- Maidanisar. (2023, 28. März). Traffic flow as an application of linear algebra - Maidanisar - Medium. Medium. https://medium.com/@maidanisar21/traffic-flow-as-an-application-of-linear-algebra-231b11aa8991
- Moler, C. B. (2010). Numerical Computing with MATLAB: Revised Reprint. SIAM.
- Multigrid-Verfahren: Anwendung und Vorteile — StudySmarter. (o.D.). StudySmarter. https://www.studysmarter.de/studium/mathematik-studium/numerik/multigrid-verfahren/
- Truss Bridges and Linear Algebra. (2016, 14. Februar). Linear Algebra Spring 2016 Application Anthology. https://applicationanthologys16.wordpress.com/2016/02/11/truss-bridges-and-linear-algebra/