Prof. K. Frischmuth
Institut für Mathematik
Universität Rostock

Numerik IV

Zusammenfassungen

1. Numerik IV im Kontext von Num I, II, III, Naturwissenschaften, Technik und Analysis
   PDE ist Gleichung mit ∂ für unbekannte Funktion mehrerer Variabler
   Beispiele: $u_t = u_t$, Lösung: $u()x,t) = f(x+t)$, Burgers, Laplace ...
   Bilanzen und Divergenz
   Klassifikation
   Komplexe Funktionen als Quelle harmonischer Funktionen (Lösungen von $\Delta u = 0$)
   Plan: nach Methoden - Differenzenverfahren, Variationsmethoden, Linienmethoden
   Hauptsatz

2. Differenzenoperatoren
   Vorwärts-, Rückwärts- und zentral Differenzen für gewöhnliche Ableitung
   äquidistante Gitter
   erste und zweite partielle Ableitungen inklusive Fehlerordnung
   Laplace-Operator und 5-Punkte-Stern

3. Modellproblem: Poisson auf Rechteck mit Dirichlet-Rand
   Steifigkeitsmatrix und Lastvektor
   Zerlegung in Randlösung und Lösung von Poisson-Problem (mit Null-RB)

4. gemischte Ableitungen

$$\begin{aligned}
u(x+h,y+k) &\approx u(x,y) + u_x h + u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 + u_{xy}hk \\
u(x+h,y-k) &\approx u(x,y) + u_x h - u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 - u_{xy}hk \\
u(x-h,y+k) &\approx u(x,y) - u_x h + u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 - u_{xy}hk \\
u(x-h,y-k) &\approx u(x,y) - u_x h - u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 + u_{xy}hk
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leadsto\ u(x+h,y+k) + u(x-h,y-k) - u(x+h,y-k) - u(x-h,y+k) \\
&\approx\ 4u_{xy}hk
\end{aligned}$$

(Konsistenzordnung 2)

unsymmetrischer Fall und Shortley-Weller

$$\begin{aligned} y(x+h_+) &\approx y(x) + y'(x)h_+ + 0.5y''(x)h_+^2 \\ y(x-h_-) &\approx y(x) - y'(x)h_- + 0.5y''(x)h_-^2 \\ y''(x)\frac{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2}{2} &= y(x-h_-)h_+ + y(x+h_+)h_- \\ &\quad -(h_- + h_+)y(x) + O(h_-^3 + h_+^3) \end{aligned}$$

Auflösen nach y'' ergibt

$$\begin{aligned} y'' &= 2\frac{h_- y_+ - (h_- + h_+)y + h_- y^+}{h_- h^{+2} + h^+ h_-{}^2} + O(h) \\ & \frac{2}{h_-(h_- + h_+)}y_- - \frac{2}{h_- h_+}y + \frac{2}{h_+(h_- + h_+)}y_+ + O(h) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Shortley-Weller: In jeder Richtung ein voller Schritt und ein gebrochener, z.B. $h_W = \mu h$, $h_N = \lambda h$.
(Konsistenzordnung nur 1)

Demo: Matrixbau und Datenstrukturen
Matrixdiskussion für elliptische Modellproblem
M-Matrizen, Inversmonotonie, Maximumprinzip
Lösungsverfahren: SOR, \, Cholesky

5. Boni: Sätze über Spektrum
λ ist EV von $A \quad \rightsquigarrow \quad |\lambda| \leq \|A\|$, wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm bezeichnet

Satz von Gershgorin
Alle Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liegen in der Vereinigung folgender n abgeschlossener Kreisscheiben

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

mit

$$S_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| := r_i \right\}$$

Stabilität
nutzen Inversmonotonie und Vergleichsproblem mit $\tilde{r} \equiv 1$
Lösung ist beschränkt durch die von $-\Delta u = 1$ in Ω,
$u = 1/8 - 1/4((x-1/2)^2 + (y-1/2)^2)$ auf $\Gamma = \partial\Omega$, $\Omega = (0,1)^2$ (Randfunktion ist Lösung)

wegen Inversmonotonie

$$b_h \le \tilde{b}_h \Longrightarrow A^{-1} r_h = U_h \le \tilde{U}_h = A^{-1} \tilde{r}_h \,.$$

Hauptsatz

nach Konstruktion (Taylor) gilt Konsistenz von $D = -\Delta$ mit D_h

$$D_h u(x,y) = Du(x,y) + O(h^2)$$

für $u \in C^4(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ist Konsistenzfehler L_h beschränkt durch die vierten reinen Ableitungen von u

$$D_h u = r + L_h \,, \quad D_h u_h = r \,, \quad \|L_h\|_\infty \le \frac{h^2}{12} \max(|u_{xxxx}| + |u_{yyyy}|)$$

Stabilitätsungleichung

$$\|D_h(u - u_h)\|_\infty \le c \Longrightarrow \|u - u_h\|_\infty \le c/8 \,.$$

Konvergenzungleichung

$$\|u_h - u\|_\infty \le C h^2 \,,$$

Beispiele

für die Übungsprobleme 01 und 02 sind Lösungen bekannt

Visualisierung

siehe Übungsaufgaben

Probleme

vierte Ableitungen sind unbekannt (weil u unbekannt)

Konstante aus Stabilitätsungleichung hängt vom Gebiet Ω ab

(müssten Vergleichsproblem lösen)

6. Etwas Nostalgie (Num II)
   - starke Diagonaldominanz $\rightsquigarrow$ Jacobi liefert eindeutige Lösung
   - $A_{ij} < 0$ für $i \neq j$ und Zeilensummen positiv $\rightsquigarrow$ Inversnichtnegativität
   - irreduzible Matrizen (Graph zusammenhängend) $\rightsquigarrow$ einige Zeilensummen dürfen Null sein
   - $A^{-1} \ge 0$ ('Inverspositivität')
   - Inverspositivität $\rightsquigarrow$ Regularität
   - M-Matrix: $A_{ii} > 0$, alle anderen kleiner oder gleich Null, A regulär, Inverse nichtnegativ
   - für $i \neq j$ sei $A_{ij} \le 0$, dann ist A regulär und $A^{-1} \ge 0$ äquivalent zu:
     $diag(A) > 0$ und $I - diag(A)^{-1} A \ge 0$ und $\rho(I - diag(A)^{-1} A) < 1$
   - PF-Theorie: $A \ge 0$, irreduzibel $\rightsquigarrow$ wenn $\rho(A) > 0$ dann einfacher EW mit positivem EV,
     wenn $B \neq A$, $B \ge A$, dann $\rho(B) > \rho(A)$
   - $A \ge 0 \rightsquigarrow \rho(A) \ge 0$ ist EW mit nichtnegativem EV, aus $B \ge A$ folgt $\rho(B) \ge \rho(A)$

- inverspositiv $\rightsquigarrow$ inversmonoton