Hyperbolische PDE

Elementarstes Beispiel

Wir betrachten das (modifizierte) Beispiel aus der Einführung

Beispiel

$$u_t = -vu_x\,, \tag{4}$$
$$u(x,0) = \exp(-(x-3)^2) =: u_0(x)\,. \tag{5}$$

Die Lösung ist bekannt:

$$u(x,t) = u_0(x-vt)\,. \tag{6}$$

Jetzt versuchen wir, eine numerische Näherungslösung zu berechnen.

Numerische Lösung des Ausgangsbeispiels

Wir haben mehrere Optionen, die partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten zu ersetzen.
Wählen wir zunächst die einfachsten: Vorwärtsdifferenzen sowohl für u_t als auch für u_x.

$$\begin{aligned} x_j &= hj\,, \qquad j \in J\,, \\ t_i &= ki\,, \qquad i \in I\,, \\ u_x(x_j,t_i) &\approx \frac{u(x_{j+1},t_i) - u(x_j,t_i)}{h}\,, \\ u_t(x_j,t_i) &\approx \frac{u(x_j,t_{i+1}) - u(x_j,t_i)}{k}\,. \end{aligned}$$

Hierbei sind I und J geeignete Indexmengen, etwa $I = \{0,1,2,\dots m\}$, $J = \{0,1,2,\dots n\}$, und $h > 0$, $k > 0$ sind Orts- bzw. Zeitschrittweite.

Simple FDM

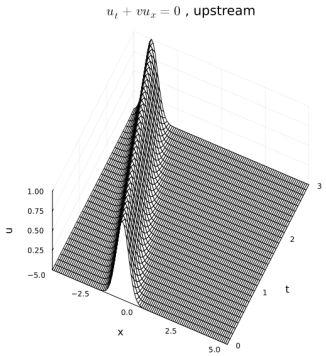
Die diskrete Version der PDE wird zu

$$\frac{u(x_j,t_{i+1}) - u(x_j,t_i)}{k} = -v\frac{u(x_{j+1},t_i) - u(x_j,t_i)}{h}$$

Aufgelöst nach $u(x_j,t_{i+1})$ erhalten wir

$$u(x_j,t_{i+1}) = u(x_j,t_i) - v\frac{k}{h}(u(x_{j+1},t_i) - u(x_j,t_i))\,.$$

Ergebnis



Ergebnis für $v = -1$

Funktioniert nicht für positive v, nicht für $v < -1$.

Funktioniert, aber schlechter, für v zwischen -1 und 0.

Symmetrische FDM

Eine weitere diskrete Version der PDE ist

$$\frac{u(x_j,t_{i+1}) - u(x_j,t_i)}{k} = -v\frac{u(x_{j+1},t_i) - u(x_{j-1},t_i)}{2h}$$

Aufgelöst nach $u(x_j,t_{i+1})$ erhalten wir

$$u(x_j,t_{i+1}) = u(x_j,t_i) - v\frac{k}{2h}(u(x_{j+1},t_i) - u(x_{j-1},t_i))\,.$$

Diese Variante funktioniert allerdings gar nicht.

Lax–Friedrich–Verfahren

Eine funktionierende diskrete Version der PDE ist das Lax–Friedrich–Verfahren

$$u(x_j,t_{i+1}) = \frac{u(x_{j-1},t_i) + u(x_{j+1},t_i)}{2} - v\frac{k}{2h}(u(x_{j+1},t_i) - u(x_{j-1},t_i))\,.$$

Wir erhalten sowohl für negative als auch für positive Geschwindigkeiten sinnvolle Ergebnisse, sofern das Schrittweitenverhältnis λ nicht zu groß wird.

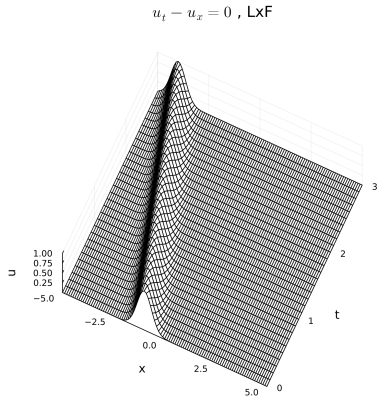
Bemerkung

Die CFL–Bedingung (Courant, Friedrich, Levy)

$$|\lambda v| \le 1$$

gibt die Oberschranke für den Zeitschritt k bei gegebenem v und h an.

Lax-Friedrich Lösung



Weiterführendes Beispiel

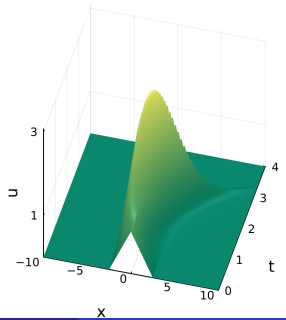
Anschließend betrachten wir das Problem

$$u_t + t^2 u_x = -xu\,, \qquad u(x,0) = \left(\frac{5-|2x|}{5}\right)^+\,.$$

Die Lösung ist nicht trivial, kann aber noch mit analytischen Methoden bestimmt werden.

Ziel ist es, Methoden zunächst an Fällen zu testen, bei denen wir die Lösung kennen und somit numerische und analytische Ergebnisse direkt vergleichen können.

exakte Lösung



Analytische Lösung

per Hand!

Konsistenz

Möge u Lösung der PDE

$$u_t + f(u)_x = 0\,,$$

sein, k der Zeitschritt, h der Ortsschritt.
Wir schreiben das Finite-Differenzen-Schema in der Form

$$u(\cdot, t+k) \approx Hu(\cdot, t)\,.$$

Das Schrittweitenverhältnis $k/h =: \lambda$ sei konstant.

Als Norm $\|\cdot\|$ legen wir die L_1-Norm der Ortsfunktionen $u_0(\cdot)$ bzw. $v(\cdot, t)$ fest. Gitterfunktionen U auf dem x-Gitter

$$\{jh : j \in \mathbb{N}\}$$

identifizieren wir mit stückweise konstanten Funktionen auf $\mathbb{R}$. Ihre diskrete l_1-Norm $h\sum_j |U_j|$ deckt sich mit der L_1-Norm.

Lokaler Fehler

Definition (lokaler Diskretisierungsfehler)

$$L_k(x,t) := \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - H_k(u(\cdot,t);x)\right]$$

Eine Methode heißt konsistent, wenn

$$\|L_k(\cdot,t)\| \to 0 \qquad \text{für } k \to 0\,.$$

Konsistenzordnung

Definition (Konsistenzordnung)

Eine Methode hat die Konsistenzordnung p, wenn für alle glatten Anfangsfunktionen mit kompaktem Träger eine Konstante C_L existiert, so dass

$$\|L_k(\cdot,t)\| \le C_L k^p \qquad k < k_0,\ t \le T\,.$$

Konsistenzordnung bei LF

Beispiel (Lax-Friedrich)

Wir lösen $u_t + au_x = 0$, d.h. der Fluss sei $f(u) = au$.

$$\frac{1}{k}\left[U_j^{i+1} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^i + U_{j+1}^i)\right] + \frac{1}{2h}a(U_{j+1}^i - U_{j-1}^i) = 0$$

Nach Taylor ergibt sich

$$L_k(x,t) = \frac{k}{2}(a^2 - \frac{h^2}{k^2})u_{xx}(x,t) + O(h^2) = O(k)$$

(für beschränktes u_{xx}).

Modified equations

Bemerkung (modified equations)

Das Lax-Friedrich-Schema wäre zweiter Ordnung genau für die PDE

$$u_t + au_x + \frac{1}{2}(ku_{tt} - \frac{h^2}{k}u_{xx}) = 0$$

oder für die parabolische Gleichung

$$u_t + au_x = \frac{h^2}{2k}(1 - \frac{k^2}{h^2}a^2)u_{xx}$$

$\rightsquigarrow$ *numerische Diffusion.*

Richtmyer–Stabilität

Definition

Eine Methode heißt stabil, wenn $\forall\, T \exists\, C_S,\ k_0 > 0$ so dass

$$\|H_k^i\| \le C_S \qquad \forall ik \le T,\ k < k_0\,.$$

Bemerkung

Speziell wenn: $\|H\| \le 1$, so ist das Verfahren stabil.

Diese Bedingung ist nicht notwendig.

Es reicht hin, dass

$$\|H_k\| \le 1 + \alpha k \qquad k < k_0\,.$$

In der Tat, dies impliziert

$$\|H_k^i\| \le (1+\alpha k)^i \le e^{\alpha k i} \le e^{\alpha T}\,.$$

Konvergenz

Definition (Fehler)

Sei U_k die numerische Lösung der partiellen Differentialgleichung zu gegebenen Anfangsbedingungen, erweitert stückweise konstant für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Die exakte Lösung sei u. Der Fehler E_k ist definiert als

$$E_k(x,t) = U_k(x,t) - u(x,t)\,.$$

Definition (Konvergenz)

Eine Methode heißt konvergent, wenn in einer geeigneten Norm $\|\cdot\|$ und für alle u_0 aus einer gewissen Klasse von Anfangsbedingungen für jedes feste $t \ge 0$ gilt

$$\|E_k(\cdot,t)\| \to 0 \quad \text{mit } k \to 0\,.$$

Konvergenz und Stabilität

Die natürliche Wahl einer Norm ist hier

$$\|v\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)|\,dx\,,$$

und dementsprechend die l_1-Norm für die Gitterfunktionen $\|V\| = h\sum_j |V_j|$.

Theorem (Äquivalenzsatz (Lax))

Für eine konsistente lineare Methode ist Stabilität notwendig und hinreichend für Konvergenz.

Exempel

Beweis:

$$\begin{aligned} \|E_k(\cdot,t_i)\| &\leq \|H_k^i\|\|E_k(\cdot,0)\| \\ &\quad + k\sum_{l=1}^{i}\|H_k^{i-l}\|\|L_k(\cdot,t_l)\| \end{aligned}$$

stabil $\rightsquigarrow$

$$\|E_k(\cdot,t_i)\| \leq C_S(\|E_k(\cdot,0)\| + k\sum_{l=1}^{i}\|L_k(\cdot,t_l)\|)$$

konsistent $\rightsquigarrow$

$$\|E_k(\cdot,t_i)\| \leq C_S(\|E_k(\cdot,0)\| + TC_L k^p)$$

Für $E_k(\cdot,0) \equiv 0$ ist der Beweis geliefert.
Andernfalls ist vorauszusetzen:

$$\|E_k(\cdot,0)\| \leq C_E k^p$$

Exempel

Wir zeigen, dass das Lax-Friedrich Schema für $u_t + au_x = 0$ stabil ist, wenn die CFL Bedingung $a\lambda \leq 1$ eingehalten wird.
Wir zeigen konkret: $\|U^{i+1}\| \leq \|U^i\|$

$$\begin{aligned} \|U^{i+1}\| &= h\sum_j |U_j^{i+1}| \\ &\leq \frac{h}{2}[\sum_j |(1-a\lambda)U_{j+1}^i| + \sum_j |(1+a\lambda)U_{j-1}^i|] \\ &= \frac{h}{2}[(1-a\lambda)\sum_j |U_{j+1}^i| + (1+a\lambda)\sum_j |U_{j-1}^i|] \\ &= \|U^i\| \end{aligned}$$

Es ist essentiell hierbei, dass die Koeffizienten $1 \pm a\lambda$ beide nichtnegativ sind.

Notwendigkeit der CFL-Bedingung

Allgemein ist es notwendig für die Konvergenz eines Differenzenverfahrens, dass sein Abhängigkeitsgebiet $\mathcal{D}(x,t)$ das der PDE enthält (wenigstens im Limit $h, k \to 0$).
Bei linearen Problemen hängt die analytische Lösung bei (x,t) von den Anfangsbedingungen bei $x - at$ ab.
Der numerische Abhängigkeitsbereich $\mathcal{D}_k(jh, ik)$ ist

$$\mathcal{D}_k(jh, ik) = [(j-i)h, (j+i)h]\,.$$

Er enthält $jh - aik$ dann und nur dann, wenn $|aik| \leq ih$, d.h.

$$|a\frac{k}{h}| = |a\lambda| \leq 1\,.$$

Weiterführendes Beispiel

Beispiel

$$u_t + t^2 u_x = -xu \qquad u(x,0) = \left(\frac{5-|2x|}{5}\right)^+\,.$$

Diese skalare Bilanzgleichung ist inhomogen, die Koeffizienten sind variabel.

Skalare Bilanzgleichungen

Allgemeiner untersuchen wir

$$au_t + bu_x = c\,, \qquad u(x,0) = u_0(x)\,.$$

Hierzu lösen wir das parameterabhängige System von ODEs in der Zeitvariablen s und mit dem Parameter x_0

$$\begin{aligned} \tau' = a\,, \quad \xi' = b\,, \quad w' = c \\ \tau(0;x_0) = 0\,, \quad \xi(0;x_0) = x_0\,, \quad w(0;x_0) = u_0(x_0) \quad . \end{aligned}$$

Die Lösung ist $u(x,t) = w(\tau;x_0)$, wobei $t = t(s) = \tau(s;x_0)$ und $x = x(s) = \xi(s;x_0)$.

Lösung des weiterführenden Beispiels

Wegen $a = 1$ gilt $s = t$. Ferner ist $b = t^2$ und $c = -xu$

Der Koeffizient b hängt nur von $t = s$ ab, es gilt $\xi'(s;x_0) = s^2$, also

$$\xi = x_0 + t^3/3\,, \text{bzw. } x_0 = \xi - t^3/3\,.$$

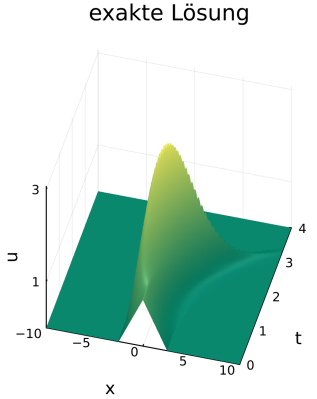
Nun gilt $w' = -\xi w = -(x_0 + s^3/3)w$, also

$$\ln(w) = -x_0 s - s^4/12 + \ln(w(0))\,.$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x - t^3/3)\exp(-(x - t^3/3)t - t^4/12) \\ &= \left(\frac{5-|2(x-t^3/3)|}{5}\right)^+ \exp(-xt + t^4/4)\,. \end{aligned}$$

Lösung



Eulergleichungen

$$u_t + \operatorname{div} F = 0 \tag{7}$$

mit:
$u = (\rho, \rho v, E)$,
$F = (\rho v, p + \rho v^2, v(E+p))$
ρ – Dichte,
v – Strömungsgeschwindigkeit,
E – Energiedichte.

$$E = \rho e + 1/2\rho v^2$$
$$p = (\gamma - 1)e$$

Statt des Systems lösen wir zunächst skalare Probleme mit vergleichbaren Eigenschaften.

Dabei erweist es sich als unumgänglich, schwache Lösungen in Betracht zu ziehen.

Klassische Lösungen für $u_t + a(u)u_x = 0$

Unter der Voraussetzung $u \in C^1$ lässt sich die Fixpunktgleichung

$$u = u_0(x - a(u)\cdot t)$$

für den Wert $u = u(x,t)$ der Lösung an der Stelle (x,t) beweisen.

Wegen $b = 0$ ist $u' = 0$, damit u konstant entlang der Charakteristik, also auch $a(u)$ konstant $\rightsquigarrow$ Charakteristiken sind Geraden.

Hierbei ist $a(u) = f'(u)$ die Schallgeschwindigkeit, die Geschwindigkeit der Charakteristiken (entlang derer klassische Lösungen konstant sind).

Lösbarkeit

Hinreichend für Lösbarkeit im Falle der Burgersgleichung ($f(u) = u^2/2$, $a(u) = u$): u_0 monoton wachsend.

Für u_0 fallend existieren Schnittpunkte der Charakteristiken $\rightsquigarrow$ Widerspruch $\rightsquigarrow u \notin C^1$

Gegenbeispiel: Für $u_0 = -\exp(x-1)$ existiert auf keinem (Zeit-)Intervall $[0, \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ eine klassische Lösung.

Schwache Lösungen

Wir suchen verallgemeinerte Lösungen der skalaren homogenen Differentialgleichung

$$u_t + f(u)_x = u_t + a(u)u_x = 0\,,$$

die

- wo möglich klassische Lösungen sind,
- aber selbst Unstetigkeiten erlauben.

Hierzu folgen wir dem allgemeinen Konzept:

- multipliziere mit Testfunktion $v \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$
- integriere über $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- wende Satz von Gauss an

Charakterisierung

Für stückweise glatte Lösungen gilt:

Schwache Lösungen erfüllen die Ausgangsgleichung im klassischen Sinne, wo die Ableitungen existieren,

auf Sprüngen gilt die Rankine-Hugoniot-Gleichung

$$\dot{\xi}(t) := s(t) = \frac{[f(u)]}{[u]}\,,$$

wobei das Symbol $[\cdot]$ für den Sprung an der Stelle ξ steht.

Details zu schwachen Lösungen

Es ist hilfreich zu bemerken, dass die linke Seite $u_t + f_x$ als Divergenz des Vektorfeldes

$$w = (f(u), u)$$

auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ aufgefasst werden kann.
(für $d = 1$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$, $2d$-Vektorfeld in der Ebene)

Nach GAUSSschem Satz gilt unter den üblichen Regularitätsannahmen:

$$\int_\Omega \operatorname{div} w\, dxdt = \oint_{\partial\Omega} w\vec{n}\, d\sigma\,,$$

wobei σ den Rand von Ω parametrisiert.

Weitere Details

Multiplikation mit einer Testfunktion v liefert

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\operatorname{div} w\, dxdt &= \int_\Omega (\operatorname{div}(vw) - \nabla v w)\, dxdt \\ &= \oint_{\partial\Omega} vw\vec{n}\, d\sigma - \int_\Omega \nabla v w\, dxdt\end{aligned}$$

Wählt man v so, dass sein Träger im Inneren von $\Omega \subset R^d \times \mathbb{R}^+$ enthalten ist, so verschwindet das Randintegral.

Für $\Omega = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ wird es zu $-\int_{\mathbb{R}^d} u_0\, dx$,

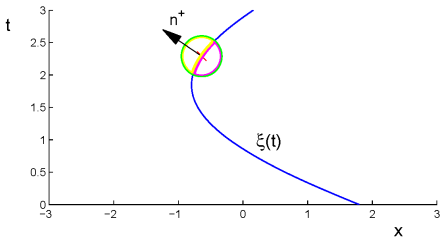
weil x den Rand parametrisiert, und der Normalenvektor $\vec{n}$ nur eine nichtverschwindende Komponente besitzt – nämlich die in t–Richtung.

Rankine-Hugoniot-Bedingung

Sei u stüuckweise C^1, wir betrachten eine Sprunglinie

$$\{(\xi(t), t)^T \quad : \quad t \in \mathbb{R}^+\}\,.$$

Interessanter Fall: Sprunglinie schneidet supp(u)



Integration

Wir zerlegen das Integral über C in Integrale üuber C^+ und C^-

$$\begin{aligned}0 &= \int_C w\nabla v dxdt = \int_{C^+} w\nabla v dxdt + \int_{C^-} w\nabla v dxdt \\ &= \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} vw^- n^-\, d\sigma + \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} vw^+ n^+\, d\sigma \\ &= \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} v[w]\vec{n}^+ d\sigma = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} v[w](-1, \xi')^T d\sigma\end{aligned}$$

Schock–Lösung

Für $u_0(x) = 1 - H(x) = \dfrac{1 - \operatorname{sign}(x)}{2}$ mit der Heavyside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ergibt sich folgende schwache Lösung u:

$$u(x,t) = u_0(x - t/2)\,.$$

Man überprüft dies leicht, da außerhalb der Schocklinie $x = \xi(t) = t/2$ offenbar die Ableitungen u_x wie u_t beide 0 sind und somit $u_t + uu_x = 0$ trivialerweise erfüllt ist, während auf der Schocklinie der Sprung von $f(u) = u^2/2$ konstant die Hälfte des Sprungs von u selbst ist.

Vieldeutigkeit

Mit der Schockgeschwindigkeit $s = \dot{\xi} = 0.5$ ist also die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt.

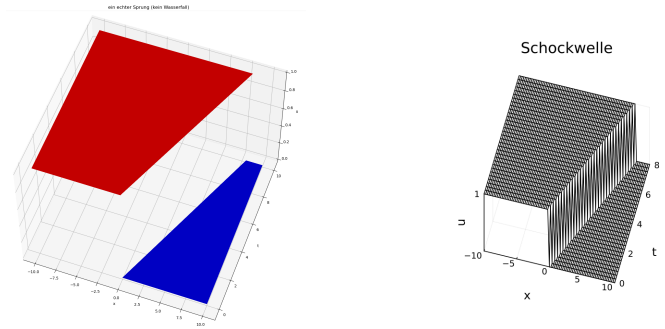
Kehren wir das Vorzeichen von u_0 um, so ist $-1 + u(-x, t)$ offenbar auch eine Lösung – aber nicht die einzige!

Eine alternative Lösung ist:

$$u(x,t) = \min(-1, -\max(0, -x/t))$$

Man beachte, dass letztere Lösung stetig ist.

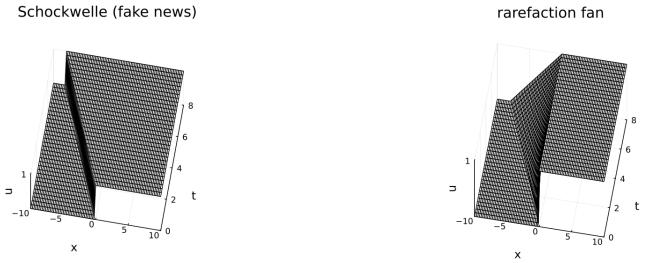
Beispiel: Schock



Schock-Lösungen

Die Welle ist konsistent mit der Rankine-hugoniot-Bedingung und der Entropiebedingung.

Beispiel: Fake



Schein-Lösung und Ausdünnungsfächer

Ein Schock am hinteren Ende erfüllt RK, widerspricht aber der Thermodynamik.

Eindeutigkeitsbedingungen

Man überzeugt sich leicht, dass die Mehrdeutigkeit von Lösungen mit Sprüngen in den Anfangswerten von kleineren zu größeren u-Werten zusammenhängt.
Andererseits lassen sich in solchen Fällen Unstetigkeiten für positive t vermeiden – es gibt stets eine Lösung in Form eines Fächers.
Physikalisch kann diese Lösung auf zwei Wegen als die einzig sinnvolle ausgezeichnet werden.

Zwei Wege

- durch parabolische Regularisierung
  hier löst man $u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}$ mit kleinem positivem ϵ, bildet dann den Grenzwert für $\epsilon \to 0 \rightsquigarrow$ Lösung ohne Sprünge von klein zu groß, höchstens mit Sprüngen von groß zu klein
- durch Entropiebedingung
  hierbei geht man von der Annahme aus, dass die Burgersgleichung reversible Prozesse beschreibt – solange die Lösungen stetig sind. Unstetigkeiten werden mit irreversiblen Vorgängen erklärt, diese erzeugen Entropie.
  Die dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik entlehnte Forderung nach nichtnegativer Entropieproduktion ergibt in letzter Konsequenz dieselben Lösungen wie die anderen Auswahlprinzipien.

Konstruktion von Entropielösungen für $u_t + uu_x = 0$

Im Fall von stückweise konstanten Anfangswerten – hinter dem Sprung (d.h. für $x < \xi(0) =: \xi_0$) ist der Wert der Lösung u^-, vor dem Sprung u^+. Für $u^- < u^+$ verschwindet der Sprung sofort. Die Charakteristiken, die von $\xi(0) - 0$ und $\xi(0) + 0$ ausgehen, liegen bei Zeit $t > 0$ um $[u]t = (u^+ - u^-)t$ auseinander. Dazwischen ist einfach linear zu interpolieren. Somit ist die Lösung für alle $t > 0$ stückweise linear,

$$u(x,t) = \begin{cases} u^- & x < \xi_0 + u^- t \\ u^I & x \in [\xi_0 + u^- t, \xi_0 + u^+ t] \\ u^+ & x > \xi_0 + u^+ t \end{cases}$$

mit

$$u^I = \frac{(\xi_0 + u^+ t - x)u^- + (x - \xi_0 - u^- t)u^+}{(u^+ - u^-)t} \quad .$$

Berechnung der Sprunglinie

Im Fall $u^- > u^+$ besteht der Sprung für alle Zeiten t, einzig die Position $\xi(t)$ der Sprungstelle ist zu berechnen. Diese ergibt sich jedoch leicht aus der Rankine-Hugoniot-Bedingung:

$$\xi(t) = \frac{u^+ + u^-}{2} t \quad .$$

In diesem Falle ist die Lösung also stückweise konstant.

Stückweise lineare Anfangsbedingungen

Im Falle von stückweise linearen unstetigen Anfangsbedingungen ist die Konstruktion von Lösungen etwas komplizierter.
Wir beschränken uns auf das Vorliegen eines einzigen Sprunges.
(Für mehr als einen Sprung ist das Vorgehen analog, aber unhandlich.)
Ist am Sprung $u^- < u^+$, so verschwindet dieser sofort, wie schon bei den stückweise konstanten Lösungen.

Variable Sprunghöhe

Für $u^- > u^+$ hingegen besteht der Sprung weiter, allerdings diesmal in zeitvariabler Höhe und somit mit variabler Geschwindigkeit $s(t) = \dot{\xi}(t)$.

Wir berechnen s aus $u^+(t) = u_0(\xi(t) - u^+(t)t)$, analog wird u^- aus derselben Fixpunktgleichung wie im Falle klassischer Lösungen bestimmt.

Dabei sind die Lösungen u^+ und u^- so auszuwählen, dass

$$\xi(t) - u^- t < \xi_0 \quad \text{und} \quad \xi(t) - u^+ t > \xi_0 \quad .$$

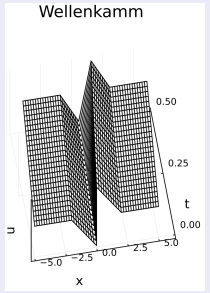
Hieraus ergibt sich dann

$$s = \dot{\xi} = \frac{u^-(t) + u^+(t)}{2} .$$

Entropielösungen

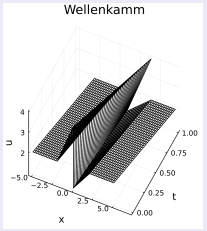
Die Position des Sprungs wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung determiniert, zur Berechnung von deren rechter Seite zwei Lösungen einer Fixpunktgleichung zu bestimmen sind.
Stückweise lineare Lösungen bleiben stückweise linear.

Beispiel ($u^+ > u^-$)

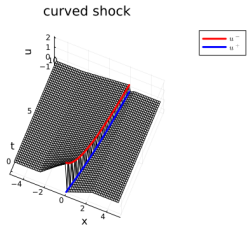


Die echten Schocklösungen – bei denen sich der Sprung nicht sofort auflöst – resultieren aus Situationen, bei denen die Konstruktion aus Charakteristiken zu solchen mehrdeutigen Relationen führt:

Beispiel ($u^+ < u^-$)



Solche Lösungen entstehen in endlicher Zeit aus Anfangsdaten mit wenigstens einem monoton fallenden Segment.



Diese Lösung wurde durch Lösung eines Cauchy-Problems für ξ, u^- und u^+ konstruiert. Das Differentialgleichungssystem wurde numerisch gelöst, die stückweise Linearität in x gilt exakt, weil sie für die Anfangswerte gilt.

- Randwerte
- Systeme
- Höhere Raumdimensionen