

aus Definition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\rightsquigarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{mit kleinem festen } h$$

Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)h^3$$

$$\rightsquigarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)h + \frac{1}{6}f'''(\xi)h^2$$

erneut Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)h^3$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(\nu)h^3$$

$$\rightsquigarrow \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{1}{6}(f'''(\xi) + f'''(\nu))h^2$$

symmetrische Differenz

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{mit kleinem festen } h$$

Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \frac{1}{24}f''''(\xi)h^4$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + \frac{1}{24}f''''(\nu)h^4$$

$$\rightsquigarrow \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = f''(x) + \frac{1}{24}(f''''(\xi) + f''''(\nu))h^2$$

symmetrisch

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \quad \text{mit kleinem festen } h$$

Partielle Ableitungen

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h}$$

$$u_y(x, y) \approx \frac{u(x, y+k) - u(x, y-k)}{2k}$$

$$u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2}$$

$$u_{yy}(x, y) \approx \frac{u(x, y-k) - 2u(x, y) + u(x, y+k)}{k^2}$$

Gemischte Ableitungen

$$u(x+h, y+k) \approx u(x, y) + u_x h + u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 + u_{xy}hk$$

$$u(x+h, y-k) \approx u(x, y) + u_x h - u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 - u_{xy}hk$$

$$u(x-h, y+k) \approx u(x, y) - u_x h + u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 - u_{xy}hk$$

$$u(x-h, y-k) \approx u(x, y) - u_x h - u_y k + \frac{1}{2}u_{xx}h^2 + \frac{1}{2}u_{yy}k^2 + u_{xy}hk$$

$$\rightsquigarrow u(x+h, y+k) + u(x-h, y-k) - u(x+h, y-k) - u(x-h, y+k)$$

$$\approx 4u_{xy}hk$$

Abschätzung

Aus obigen Berechnungen folgt:

Theorem

Der 5-Punkte-Differenzenstern ist zweiter Ordnung genau, der Fehler genügt der Abschätzung

$$\|\Delta_h(u) - \Delta u\| \leq \frac{h^2}{12} (\max |u_{xxxx}| + \max |u_{yyyy}|) \quad (3)$$

Hierbei ist D_h die Differenzenapproximation des Differentialoperators D , $D = -\Delta$.

(oder leichte Abwandlung davon, positive Koeffizienten vor zweiten Ableitungen, etwa $D = -\partial_{xx} + 3\partial_{yy}$)

DAS Beispiel

Wir lösen

$$-\Delta u(x, y) = r \quad \text{für } x \in (x_l, x_r), \quad y \in (y_l, y_r).$$

Hierbei sind alle Parameter $x_l = y_l = 0$, x_r, y_r , nicht unbedingt gleich, $r = \text{const} = 1$.

Es existiert ein $h > 0$ passend zu äquidistanten Gittern in beiden Richtungen.

Auf dem Rand gelten Dirichletbedingungen (auf nichttrivialem Teilstück, wenigstens in einem Gitterpunkt) oder Neumannbedingungen.

Konvergenz

Anhand eines Modellproblems studieren wir:

- Konsistenz
- Stabilität
- Maximumprinzip
- Monotonie
- Stabilitätsungleichung
- Konvergenz

Konsistenz

Die erste Voraussetzung der Konvergenzbetrachtung ist die Konsistenz.

Wir studieren:

- Modellfall: Laplace auf Einheitsquadrat
- identische Schrittweiten $h_x = h_y = h$
- Gitteroperator – 5-Punktestern
- Rand aus Gitterpunkten (mit Dirichletbedingungen)
- Wahl der Maximumnorm
- Konsistenzabschätzung

Wir lösen

$$\begin{aligned} Du &= r \text{ auf } \Omega, \\ u|_{\Gamma} &= q. \end{aligned}$$

Hierbei ist Ω das Gebiet, $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand.

Im Folgenden setzen wir exemplarisch $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $D = -\Delta$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \Omega \cap h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z} \\ \Gamma_h &= \partial\Omega_h \\ \bar{\Omega}_h &= \Omega_h \cup \Gamma_h \end{aligned}$$

Es sei allgemein $\Gamma_h \subset \Gamma = \partial\Omega$.

Wir fordern von der numerischen Lösung u_h , dass für alle $x \in \Omega_h$ gelte $D_h u_h(x) = r(x)$, und für alle x aus Γ_h die exakten Dirichletbedingungen erfüllt sind, $u_h(x) = u(x) = q(x)$.

Bemerkung (Lego)

Sinnvolle Gitter können auch leicht für Gebiete, die eine Vereinigung von Rechtecken sind, unter Einschränkungen an die Anstiege auch Dreiecken und Trapezen, konstruiert werden.

Beliebig gekrümmte Ränder, etwa bei impliziter Definition der Randkurve (Kreis, Ellipse, Cassini-Kurven), erfordern spezielle Modifikationen des Differenzsterns am Rand.

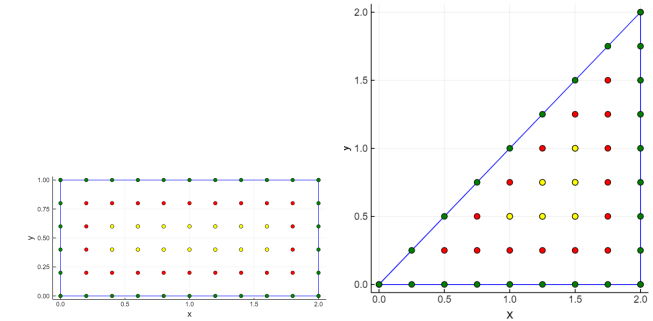


Abb. 4: Domain and grid

Treppe und Diamant

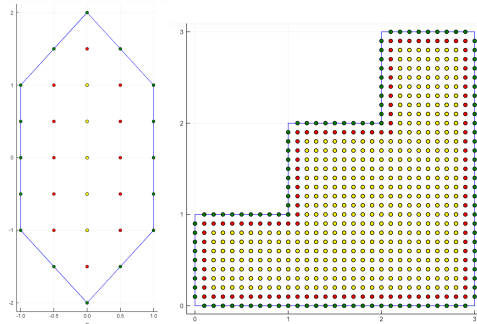


Abb. 5: Domain and grid

Gleichungssystem

Die Forderungen in den Gitterpunkten sind sämtlich affin linear, folglich gilt eine Matrixdarstellung der Form

$$A_h U_h = b_h.$$

Hierbei ist $U_h \in \mathbb{R}^N$ der Vektor der Gitterwerte von $u_h \in C(\Omega_h)$.

Bemerkung

Wie schon zuvor bei den hyperbolischen Problemen, müssen wir zwecks Vergleichs zwischen exakter und numerischer Lösung einen geeigneten Raum mit geeigneter Norm wählen. Unsere Wahl ist hier Abschneiden der kontinuierlichen Lösungen von $C(\Omega)$ auf $C(\Omega_h) \equiv \mathbb{R}^N$ mit der Maximumnorm. (Analog für r und für q auf dem Rand.)

Rechte Seite

Bemerkung

Das Gleichungssystem enthält nur Gleichungen für die Werte an inneren Gitterpunkten. Die rechte Seite des LGS entspricht an randfernen Punkten (x_l, y_l) der Einschränkung der rechten Seite $r(x_l, y_l) = r_h(x_l, y_l) = b_l$ des analytischen Problems.

Die Struktur der Matrix hängt von der Nummerierung der Gitterpunkte ab.

Bei randnahen Punkten erstreckt sich der Diskretisierungsstern über den Rand, so dass die entsprechenden Randwerte einen Beitrag zur rechten Seite b liefern.

Alternative: LGS auf $\bar{\Omega}_h$, inklusive Randbedingungen $\rightsquigarrow$ fehlende Symmetrie $\rightsquigarrow$ Block zu Randvariablen auf rechte Seite ...

Wichtige Eigenschaften von FDM-Systemmatrizen

Die Diskretisierungsmatrizen, die mittels FDM aus elliptischen partiellen Differentialgleichungen erzeugt werden, haben typische Eigenschaften.

Dazu gehört ein Vorzeichenmuster und Dominanzbedingungen, wie etwa:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$,
- $\sum_{j=1}^n A_{ij} \geq 0$ für $j = 1, \dots, n$

(schwache Diagonaldominanz)

Hieraus ergibt sich letztendlich eine Stabilitätsabschätzung und die Konvergenz der FDM.

Dominanz

Definition (Dominanz)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *stark diagonaldominant*, falls eine Konstante $0 \leq \theta < 1$ existiert mit

$$\theta |A_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Gilt die Ungleichung nur für $\theta = 1$, so heißt die Matrix *schwach diagonaldominant*.

Inversmonotonie

Theorem

Es sei für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} A_{ij} &\leq 0 \quad \text{für } i \neq j, \\ \sum_{j=1}^n A_{ij} &> 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$Ax \geq 0 \implies x \geq 0.$$

Bemerkung

Wir verstehen die Ordnungsrelationen $<$, $>$, $\leq$ wie $\geq$ im Falle von endlichdimensionalen Vektoren komponentenweise. (Bei Funktionen punktweise.)

Theorem

Es sei für eine irreduzible Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} A_{ij} &\leq 0 \quad \text{für } i \neq j, \\ \sum_{j=1}^n A_{ij} &\geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n A_{ij} &> 0 \quad \text{für wenigstens ein } i. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$Ax \geq 0 \implies x \geq 0.$$

Bemerkung (Zusammenhang)

Eine Matrix heißt **reduzibel**, wenn ihr Graph nicht zusammenhängt. Der Graph kann mit dem numerischen Gitter assoziiert werden. (Bei nichtsymmetrischen Matrizen $\rightsquigarrow$ gerichtete Graphen, hier weniger von Interesse.)

Bemerkung (Beweisideen)

indirekt, alle Komponenten auf Minimalwert setzen, annehmen, dass dieser negativ ...
Einheitsvektoren abbilden, spaltenweise operieren ...
(Details live)

Definition (Inverspositivität)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **inverspositiv**, wenn A regulär und

$$A^{-1} \geq 0.$$

Bemerkung

Die Definition ist der Inversmonotonie äquivalent:

$$Ax \geq Ay \implies x \geq y.$$

Bemerkung (positiv?)

eigentlich ja nur nichtnegativ!

M-Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **M-Matrix**, wenn

$$\begin{aligned} A_{ij} &\leq 0 \quad \text{für } i \neq j, \\ \sum_{j=1}^n A_{ij} &\geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

und A regulär, A^{-1} nichtnegativ.

Fakten

Theorem

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{i,j} \leq 0$ für $i \neq j$.
 A ist **inverspositiv** dann und nur dann, wenn

- $A_{ii} > 0$ für alle i und
- $I - D^{-1} \geq 0$ und
- $\rho(I - D^{-1}A) < 1$,

wobei $D = \text{diag}(A)$ bezeichne.

Folgerung

Die Jacobi-Iteration für LGS $Ax = b$ konvergiert, wenn A eine M-Matrix ist.

Perron-Frobenius

Der Beweis des Satzes erfordert eine Aussage über das Spektrum von nichtnegativen Matrizen (nach Perron-Frobenius).

Theorem

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq 0$ und irreduzibel. Dann gilt

- $\rho(A) > 0$ ist ein einfacher Eigenwert von A ,
- der zu $\rho(A)$ gehörende Eigenvektor x ist positiv, $x > 0$,
- $\rho(B) > \rho(A)$, $\forall B \geq A$, $B \neq A$.

Bemerkung

Wir wenden den Satz auf die Matrix $F := I - D^{-1}A$ an.
(live act und Demo, dass mittels F Gesamtschrittverfahren durchgeführt werden kann und Lösung liefert)

Eine Abschätzung

Theorem

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine M-Matrix, $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ und $d = \min Ae > 0$.

Dann gilt für die Lösung von $Ax = b$

$$\|x\|_\infty \leq d^{-1} \|b\|_\infty.$$

Eigenschaften des Modellproblems

Für $D = -\Delta$ und den klassischen 5-Punkte-Differenzenstern

$$h^{-2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

wird wegen $\Gamma_h \neq \emptyset$ die Systemmatrix A zur M-Matrix.

Folgerung

Aus der Inversmonotonie können wir für zwei RWP mit identischem Operator und identischen Randbedingungen auf demselben Gebiet folgern

$$b_h \leq \tilde{b}_h \implies A^{-1}r_h = U_h \leq \tilde{U}_h = A^{-1}\tilde{r}_h.$$

Bemerkung

Als Vergleichsproblem bietet sich das mit der rechten Seite $\tilde{r} \equiv 1$ an. Als Beispiel diene $-\Delta u = 1$ in Ω , $u \geq 0$ auf $\Gamma = \partial\Omega$, $\Omega = (0, 1)^2$, $u = 1/8 - 1/4((x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2)$.

Abschätzung

Theorem

Wenn gilt $D_h(u_h - u) \leq c$ auf Ω_h , so ist $\max(u_h - u) \leq c/8$.
Analog: $D_h(u - u_h) \leq c \implies \max(u - u_h) \leq c/8$.

Folgerung

$$\|D_h(u - u_h)\|_\infty \leq c \implies \|u - u_h\|_\infty \leq c/8.$$

Bemerkung

Der Faktor $1/8$ hängt ab von Gebiet Ω und Operator D .
Auch für beliebige Gebiete ist ein Viertel des quadrierten Abstandes vom Schwerpunkt ein geeigneter Ausgangspunkt für die Konstruktion von Vergleichsfunktionen.
(Je größer Gebiet, desto schlechter Konstante)

Wir erinnern uns, dass nach Konstruktion der Differenzenapproximation gilt

$$D_h u(x, y) = Du(x, y) + O(h^2).$$

Unter der Voraussetzung $u \in C^4(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ist der Konsistenzfehler L_h beschränkt durch die vierten Ableitungen von u .

Es gilt

$$D_h u = r + L_h, \quad D_h u_h = r, \quad \|L_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} (\max(|u_{xxxx}|) + \max(|u_{yyyy}|)).$$

(Für andere Operatoren und Gittertypen unter entsprechenden Anpassungen ...)

Theorem (Konvergenzgleichung)

Für die FDM-Lösung mit Schrittweite h gilt

$$\|u_h - u\|_\infty \leq Ch^2,$$

wobei C eine vom Operator und vom Gebiet abhängige Konstante ist.

Bemerkung

Somit folgt aus Konsistenz zusammen mit der Stabilität die Konvergenz der FDM für die betrachtete Klasse elliptischer Randwertprobleme.

Bemerkung

Die Erweiterung des Operators um Konvektionsterme $v \nabla u$ und Produktionsterme $-bu$ sind unproblematisch solange $b \geq 0$ und $|v|$ moderat.

Für große Geschwindigkeiten v kann die Bedingung $A_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ bei zentralen Differenzen verletzt werden $\rightsquigarrow$ einseitige Differenzen, upwind ...

Inhomogenität

Sind die Randwerte nicht konstant gleich Null, führen sie mit positiven Koeffizienten zu Beiträgen in randnahen Knoten. Um die Norm der Lösung durch die der Daten abzuschätzen, liften wir die zuvor betrachtete Vergleichsfunktion um Eins.

Mittels der Vergleichsfunktion

$$u = 9/8 - 1/4((x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2)$$

kann die Lösung des Randwertproblems durch die kompletten Daten, d.h. Quellterm r und Randwerte q , abgeschätzt werden.

(Es gilt $u(x) \geq 1$ auf Γ , für andere Gebiete/Operatoren analoge Vorgehensweise.)

Unsymmetrische zweite Ableitung

Sofern von konstanten Schrittweiten abgegangen werden muss, ist der 5-Punkte-Stern zu modifizieren.

$$\begin{aligned} y(x + h_+) &\approx y(x) + y'(x)h_+ + 0.5y''(x)h_+^2 \\ y(x - h_-) &\approx y(x) - y'(x)h_- + 0.5y''(x)h_-^2 \\ y''(x) \frac{h_-^2 h_- + h_+ h_-^2}{2} &= y(x - h_-)h_+ + y(x + h_+)h_- \\ &\quad - (h_- + h_+)y(x) + O(h_-^3 + h_+^3) \end{aligned}$$

Auflösen nach y'' ergibt

$$\begin{aligned} y'' &= 2 \frac{h_- y_+ - (h_- + h_+)y + h_- y_+}{h_- h_+^2 + h_+ h_-^2} + O(h) \\ &\quad \frac{2}{h_-(h_- + h_+)} y_- - \frac{2}{h_- h_+} y + \frac{2}{h_+(h_- + h_+)} y_+ + O(h) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Shortley-Weller: In jeder Richtung ein voller Schritt und ein gebrochener, z.B. $h_W = \mu h$, $h_N = \lambda h$.

Demo zur Diskretisierung eines Modellfalls

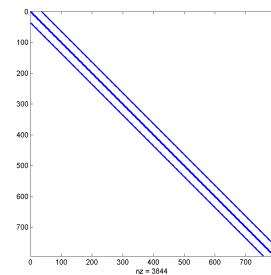


Abb. 6: Laplace auf Rechteck

Lösung

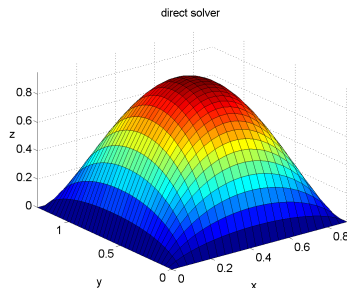


Abb. 7: Lösung der Poissongleichung

Iteration (Jacobi)

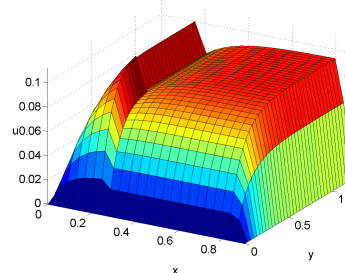


Abb. 8: Iterativer Solver

Überrelaxation

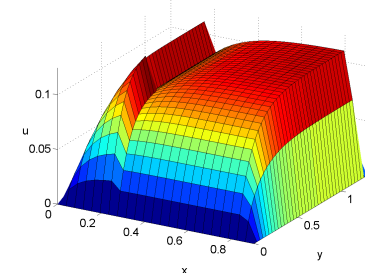


Abb. 9: Überrelaxation

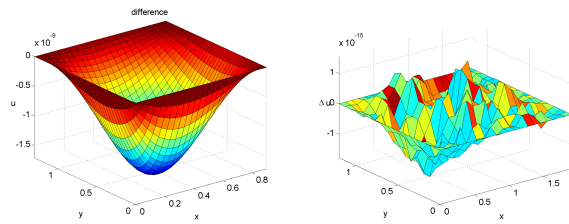


Abb. 10: Differenz zwischen Lösungen

Wir untersuchen das Problem

$$1 - 2\partial_{xx}u(x, y) - 3\partial_{yy}u(x, y) = 0 \text{ für } x \in (-1, 1), y \in (|x| - 2, 2 - |x|),$$

mittels Differenzenverfahren.

Beide Schrittweiten, in x wie in y -Richtung, seien $h_x = h_y = 0.5$.

Auf $x = -1$ gelten Dirichlet-Bedingungen $u(-1, y) = 0$.

Auf dem übrigen Rand gelte $u(x, y) = 1 - |y|$.

Wir stellen die Knotengleichungen auf und lösen das lineare Gleichungssystem.

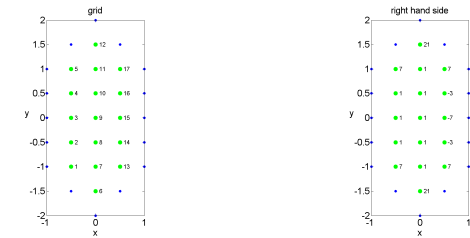
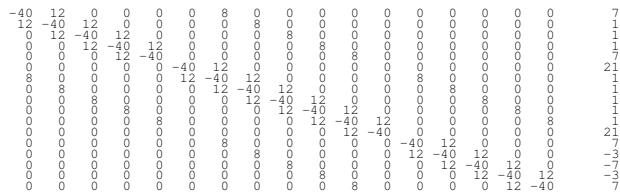


Abb. 11: Gebiet und Gitter



Bemerkung

Als Operator haben wir $2\partial_{xx} + 3\partial_{yy}$ angenommen, daher die negativ definite Matrix.

Lösung

Werte an den Gitterpunkten:

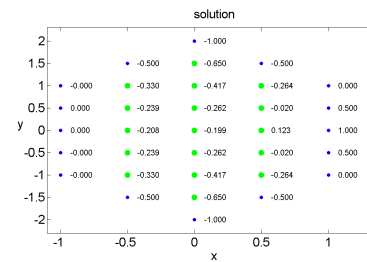


Abb. 12: Lösung

3d-Ansicht

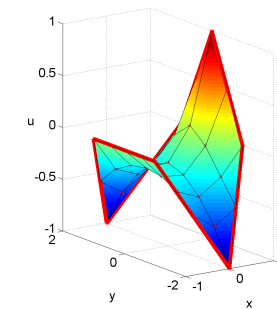


Abb. 13: Lösung in 3d