U N I W E R S Y T E T   W A R S Z A W S K I
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Mechaniki

Kurt Frischmuth

# ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI Z WARUNKAMI TARCIA NA PODPORACH

Praca magisterska

Opiekun naukowy
Dr Anna Wachecka-Skowron

W A R S Z A W A   1980 r.

SPIS TREŚCI

## Wstęp

Niniejsza praca oparta jest na definicji abstrakcyjnych więzów dla operatorów w analizie funkcjonalnej [5]. Teoria tych więzów jest bardzo bogata, możemy za jej pomocą opisać wiele sytuacji interesujących z punktu widzenia fizyki.

Rozpatrywane w pracy zagadnienia mają jedną cechę wspólną: występuje w nich zjawisko tarcia. Jako pierwszy przykład badany jest płaski ruch punktu materialnego z tarciem. Przykład ten służy przede wszystkim do ilustracji kilku ważnych pojęć, potrzebnych później w bardziej złożonych sytuacjach. W szczególności dokładnie omówione zostały własności przyjętej relacji i realizacji więzów. Podano przykład ruchu prostoliniowego i wprowadzono funkcję $k: R^2 \longrightarrow R^2$, odgrywającą podstawową rolę przy rozwiązywaniu zagadnień początkowych.

Proponowany model nie rozróżnia "tarcia statycznego" i "dynamicznego", jak również nie uwzględnia zależności od prędkości. Nakłada to oczywiście ograniczenia na zakres stosowalności teorii [3]. Na uwagę zasługuje zjawisko onizatropii tarcia.

Następnie pokazano jak otrzymać, wychodząc z klasycznej teorii sprężystości i korzystając z teorii więzów w analizie funkcjonalnej, zagadnienia dynamiczne i statyczne liniowej teorii sprężystości z warunkami tarcia na brzegu.

W definicji więzów abstrakcyjnych zawarty jest postulat poprawności. W celu pokazania poprawności zagadnienia trzeba udowodnić twierdzenie o istnieniu rozwiązania. Dowód taki przeprowadzono dla zagadnienia statycznego, korzystając z metody minimalizacji energii potencjalnej.

Dowód twierdzenia o istnieniu dla zagadnienia dynamicznego przy założeniu izotropii tarcia można znaleźć w [1]. W oparciu o wyniki niniejszej pracy dowód ten można przeprowadzić w analogiczny sposób w przypadku ogólnym.

Metoda stosowana do dowodu twierdzenia o istnieniu rozwiązania pozwala również na wyciąganie pewnych wniosków o jedyności rozwiązania. W przypadku, gdy na całym brzegu zadane są warunki tarcia, zagadnienie jedyności rozwiązania nie jest jeszcze do końca rozwiązane. Mamy jedyność odkształceń i naprężeń, a w ogólności nie można stwierdzić, iż rozwiązanie jest wyznaczone z dokładnością tylko do dowolnego przemieszczenia sztywnego.

W przypadku zaś, gdy na części brzegu o dodatniej mierze zadane są przemieszczenia, udowodniono jednoznaczność rozwiązania.

# ROZDZIAŁ I

## Definicja więzów

### 1. D - więzy

Niech $X$ i $Y$ będą przestrzeniami liniowymi, a $A$ będzie odwzorowaniem

$$A : D(A) \longrightarrow R(A), \quad \text{gdzie}$$

$$D(A) \subset X, \quad R(A) \subset Y.$$

Określamy D - więzy dla operatora $A$ przez

- relację więzów: $\emptyset \neq D_A \subset D(A)$
- realizację więzów, tj. przez podanie funkcji

$$D_A \longrightarrow 2^Y, \quad D_A \ni x \text{ --- } Y_x \subset Y \quad \text{takiej, że}$$

$$\forall\, y \in R(A)\ \exists (x,r) \in D_A \times Y_x : A(x) = y + r$$

$$\text{oraz} \quad y \in A(D_A) \Longrightarrow r = \Theta$$

### 2. R - więzy

Niech $A$ będzie takie jak wyżej. Określamy R - więzy dla operatora $A$ przez

- relację więzów: $\emptyset \neq R_A \subset R(A)$
- realizację więzów, tj. przez podanie funkcji

$$R_A \longrightarrow 2^X, \quad R_A \ni y \longrightarrow X_y \subset X, \quad \text{takiej, że}$$

$$\forall\, x \in D(A)\ \exists\, (y,d) \in R_A \times X_y = A(x + d) = y$$

$$\text{oraz} \quad x \in A^{-1}(R_A) \Longrightarrow d = \Theta$$

### 3. Kombinacja D i R - więzów.

Załóżmy, że zadane są D - więzy dla operatora $A$. Określamy następującą relację w $X \times Y$:

$$X \sim Y \Longleftrightarrow \quad r \in Y_x : A(x) = y + r$$

i oznaczamy ją przez $D(B)$, tj.

$$D(B) = \{(x,y) \in X \times Y : X \sim Y\}$$

Zdefiniujemy następujące odwzorowanie:

$$B : D(B) \longrightarrow R(B) = \bigcup_{x \in D_A} Y_x \subset Y$$

$$B(x,y) = A(x) - y$$

Określamy obecnie R - więzy dla operatora B przez

- relację więzów: $R_B \subset R(B)$
- realizację więzów, tj. przez podanie funkcji

$$R_B \longrightarrow 2^{X \times Y}, \quad r \longrightarrow X\ Y_r$$

przy czym żądamy, aby

$$\forall (x,y) \in D(B) \exists (r,d_x,d_y) \in R_B \times X\ Y_r : B(x + d_x,\ y + d_y) = r.$$

Własności relacji $D(B)$

a) Niech $x \in X$. Wówczas

$$\left[\exists y \in Y : (x,y) \in D(B)\right] \iff x \in D_A$$

Istotnie, funkcja $x \longrightarrow Y_x$ jest określona na $D_A$ i spełnia warunek:

$$\forall x \in D_A : \Theta \in Y_x$$

b) $\forall y \in R(A) \exists x \in X : (x,y) \in D(B)$

c) Relacja $D(B)$ na ogół nie jest prawostronnie jednoznaczna. Przykład: Punkt poruszający się po płaszczyźnie. Składowa siły prostopadła do płaszczyzny ruchu nie wpływa na ruch, jest zrównoważnona przez reakcję więzów.

d) Relacja $D(B)$ na ogół nie jest lewostronnie jednoznaczna.

Lewostronna jednoznaczność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy przy zadanym $y$ można wyznaczyć jednoznacznie $x$ i $r$.

4. Przykłady

Ruch punktu materialnego na płaszczyźnie.

Niech $x = x(t) \in C^2(0,T) = D(A) \subset X$

$y = y(t) \in C(0,T) = R(A) \subset Y$

$x,y \in R^2$, $T \in R^+$, gdzie $X$ jest przestrzenią funkcji klasy $C^1(0,T)$ takich, że $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ istnieje poza skończoną ilością punktów i jest kawałkami ciągłe. $Y$ zaś jest przestrzenią funkcji kawałkami ciągłych.

Określamy operator

$A : X \longrightarrow Y$ wzorem

$A(x) = m\ddot{x} = y$, $m \in R^+$,

a następnie D - więzy dla operatora $A$ przez

- $D_A = \{x \quad D(A) : \dot{x} = 0\}$
- $\forall x \in D_A : Y_x = Y$

Niech $y \in R(A)$, to $A(x_0) = y + r$, $A(x_0) = 0$

$\Longrightarrow r = -y$.

Widzimy więc, że $D(B) = D_A \times R(A)$

$B : D(B) \ni (x,y) \longrightarrow r \in Y$

Niech $\widetilde{R}_B$ będzie wypukłym podzbiorem płaszczyzny, ograniczonym brzegiem $\partial\widetilde{R}_B$, będącym krzywą klasy $C^2$.

Nakładamy R - więzy na B:

- $r(t) \in \tilde{R}_B \quad \forall t \in (0,T)$, czyli

$$R_B = \left\{ y \in Y : y(t) \in \tilde{R}_B \ \forall t \in (0,T) \right\}$$

- $$X\,Y_r = \left\{ (d_x, d_y) \in X \times Y : \forall \tilde{r} \in \tilde{R}_B,\ \forall t \in (0,T) : \dot{d}_x(t)(\tilde{r} - r(t)) \geqslant 0, \quad d_y(t) = 0 \right\}$$

Na punkt materialny działa siła $y$. Siła ta jest w równowadze z siłą reakcji $r = -y$. Jeśli zaś $y$ osiąga pewną granicę, punkt zacznie się poruszać. Interpretujemy to zjawisko jako tarcie.

Uwaga:

Założenie wypukłości zbioru $\tilde{R}_B$ ma uzasadnienie fizyczne. Załóżmy, że na punkt materialny działa pewna siła. Podziałamy nań dodatkową siłą o określonym kierunku i wartości bezwzględnej $F$. Założenie wypukłości wyklucza taką sytuację: $F_1 < F_2$, przy sile $F_1$ punkt by się poruszał, przy sile $F_2$ natomiast nie.

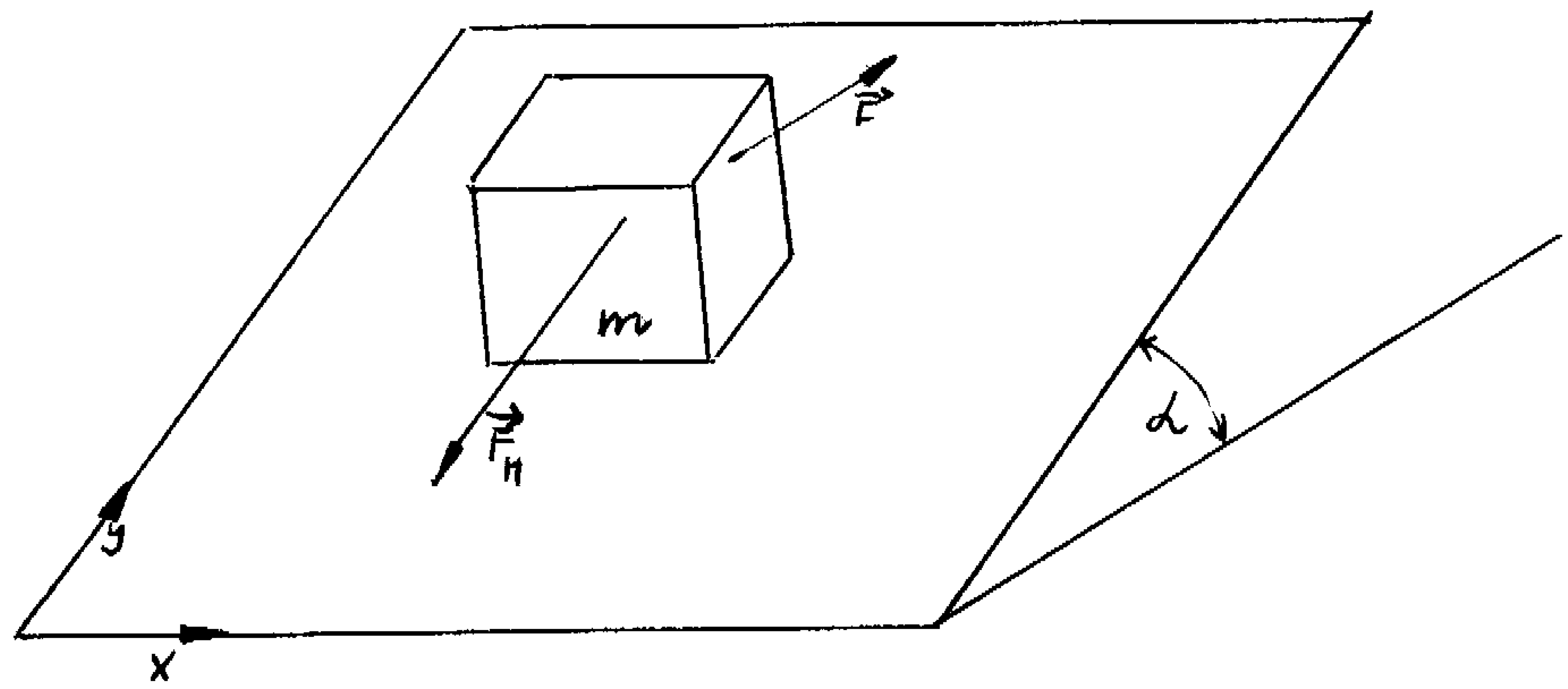
Przyjęta realizacja więzów ma następujące własności:

a) Jeśli $r(t) \in \operatorname{int} \tilde{R}_B$, to $\dot{d}_x(t) = 0$ dla $(d_x, d_y) \in X\,Y_r$.

b) Jeśli $r(t) \in \partial \tilde{R}_B$, to $\dot{d}_x(t) = -\lambda\eta$ dla $(d_x, d_y) \in X\,Y_r$, gdzie $\eta$ jest wektorem <u>zewnętrznie normalnym</u> do $\partial \tilde{R}_B$ w punkcie $r(t)$, $\lambda$ zaś parametrem nieujemnym.

c) Zapewniona jest stateczność zagadnienia w następującym sensie: Przypuśćmy, że działając dodatkową siłą $\vec{F}$ na spoczywający punkt materialny, na który już działa siła

$\vec{F}_H$, przesunęlibyśmy go w pewnym kierunku. Żądamy aby praca wykonana przez tę siłę była nieujemna. Wyklucza to taką sytuację: Punkt materialny o masie m spoczywa na płaszczyźnie pochylonej do poziomu pod kątem $\alpha$. Działamy nań dodatkową siłą $\vec{F}$ o dodatkowej składowej w kieunku y, wskutek czego ciało zacznie się ześlizgiwać w kierunku - y.




Uwaga:

Uważaliśmy dotąd zagadnienie jako płaskie. Traktując to założenie jako więz możemy zbiór $R_B$ określić w zależności od reakcji tego więzu, czyli od siły prostopadłej do płaszczyzny ruchu [3]. Można to również uogólnić na ruch punktu materialnego po dowolnej gładkiej hiperpowierzchni bądź krzywej, przyjmując $\tilde{R}_B$ jako podzbiór przestrzeni stycznej do toru.

Przykład:

Niech $F_N \geqslant 0$ będzie reakcją wyżej wymienionego więzu, $\mu$ zaś stałą dodatnią.

Przyjmując $\tilde{R}_B = B(o, \mu F_N)$, gdzie $B(x,r)$ oznacza kulę domkniętą o środku w x i o promieniu r, otrzymujemy klasyczne prawo tarcia; prawo Coulomba.

Niech $r(t_o) \in \partial \tilde{R}_B$. Na mocy własności b) wyznaczony jest kierunek i zwrot prędkości w chwili $t_o$, zachodzi

$$\dot{d}_x(t_o) = -\lambda \eta \qquad \text{gdzie}$$

jest wektorem <u>zewnętrznie</u> normalnym. Załóżmy teraz, że brzeg $\partial\tilde{R}_B$ zbioru $\tilde{R}_B$ nie zawiera odcinków prostych, czyli że $\tilde{R}_B$ jest zbiorem silnie wypukłym. Tym samym przyporządkowanie punktowi brzegu wersoru wewnętrznie normalnego jest odwracalne. Oznaczmy więc

$$f : S^1 \text{---} \partial\tilde{R}_B$$

funkcją przyporządkującą wersorowi punkt brzegu $\partial\tilde{R}_B$, w którym on jest wewnętrznie normalny. Funkcja ta jest ciągle różniczkowalna.

Niech $v \in R^2$ będzie prędkością punktu materialnego.

Oznaczmy $$k(v) \underset{def}{=} \begin{cases} f\left(\frac{v}{|v|}\right) & \text{dla} \quad v \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad v = 0 \end{cases}$$

Funkcja tu jest ciągłe różniczkowalna w $R^2 \setminus \{0\}$.

Załóżmy natomiat, że brzeg $\partial\tilde{R}_B$ zawiera odcinek prosty. W tym przypadku łatwo pokazać takie zagadnienie początkowe, które nie posiada jednoznacznego rozwiązania. Będziemy więc w dalszym ciągu zakładać, że zbiór $\tilde{R}_B$ jest zbiorem silnie wypukłym.

Rozważmy jeszcze przypadek szczególny ruchu prostoliniowego. Niech zadane będzie $v_o \in R^2$, a

$$y(t) = -\left[k(v_o) + \lambda\eta\right] , \quad \lambda = \lambda(t) \geqslant 0, \qquad \eta = \frac{v_o}{|v_o|}, \quad v_o \neq 0$$

lub $$y(t) = -\left[r + \lambda\eta_r\right] \qquad \lambda = \lambda(t) \geqslant 0, \quad r \in \partial\tilde{R}_B \text{ - dowolne,}$$

$\eta_r$ - wersor zewnętrznie normalny w $r$ do $\partial\tilde{R}_B$ dla $v_o = 0$.

Ruch odbywa się w tym przypadku po półprostej wyznaczonej przez wersor $\eta$, względnie $\eta_r$, z przyspieszeniem $a = \frac{\lambda}{m}$. Jeśli $v_0 \neq 0$ a $\lambda = 0$, to ruch jest jednostajny.

5. Liniowa teoria sprężystości z warunkami tarcia na brzegu.

– Zagadnienie dynamiczne

Niech $\Omega \subset R^3$ będzie zbiorem otwartym zajętym przez ciało sprężyste w stanie niezdeformowanym.

Zakładamy, że $\Omega$ jest ograniczone brzegiem regularnym $\Gamma$. Niech $(x_i) \in \Omega$ będą współrzędnymi punktu materialnego w konfiguracji odniesienia, $(X_i)$ natomiast współrzędnymi tego samego punktu w konfiguracji aktualnej.

Zachodzi wzór

$$X_i = x_i + u_i(x,t)$$

gdzie $(u_i)$ jest wektorem przemieszczenia punktu materialnego $x = (x_i)$.

Zakładamy, że

a) przemieszczenia są małe

b) gęstość $\rho_0$ w stanie niezdeformowanym jest stała, przyjmujemy $\rho_0(x) = \rho_0 = 1$

c) współczynniki sprężystości $a_{ijkh}$ nie zależą od miejsca, chwili i tensora odkształcenia.

Uwaga: Z założenia b) można zrezygnować, zakładając, że $\rho_0(x)$ jest funkcją mierzalną i ograniczoną taką, że $\rho_0(x) \geqslant \rho_0 > 0$. Analogicznie możnaby założyć, że $a_{ijkh} = a_{ijkh}(x)$ jest mierzalną ograniczoną funkcją zmiennej $x$.

Współczynniki $a_{ijkh}$ mają następujące własności symetrii i eliptyczności:

1) $a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij}$

2) $\forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} : a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \geqslant \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$

gdzie $\alpha$ jest stałą dodatnią.

Założenia te prowadzą do następującego układu równań różniczkowych:

$$1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \sigma_{ij,j} + f_i \qquad \text{w } \Omega$$

gdzie $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh} \; \varepsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2} a_{ijkh} (u_{k,h} + u_{h,k})$

$f = (f_i)$ jest gęstością zadanych sił objętościowych.

Żądamy, aby spełnione były warunki początkowe

$$2) \quad \begin{aligned} u_i(x,0) &= u_{o_i}(x) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) &= u_{1_i}(x) \end{aligned}$$

oraz przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$3) \quad u_i = U_i \qquad \text{na} \quad \Gamma_u \subset \Gamma$$

Wprowadzamy obecnie kilka oznaczeń.

Niech $x \in \Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma \setminus \Gamma_u$.

$$\sigma_{T_i}(x) = \sigma_{ij}(x)\, n_j(x) - \sigma_{l_j}(x)\, n_l(x)\, n_j(x)\, n_i(x),$$

gdzie $n(x)$ jest wersorem zewnętrznie normalnym do $\Gamma_{\mathcal{F}}$ .

$\sigma_T(x) = (\sigma_{T_i}(x))$ jest więc naprężeniem stycznym w punkcie $x$.