Rostock. Math. Kolloq. 29, 112 - 120 (1986) 73E10

Kurt Frischmuth

Iterationsverfahren zur Lösung eines Problems der nichtlinearen Mechanik

1. Einführung

Zahlreiche numerische Probleme führen auf eine Fixpunktgleichung

$$\varphi(x) = x \tag{1}$$

mit $\varphi: B \to B$,
wobei B ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik ϱ sei. Unter der Voraussetzung, daß die Abbildung φ kontrahierend ist, d. h.

$$\exists L < 1 \ \forall x_1, x_2 \in B \quad \varrho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < L\varrho(x_1, x_2), \tag{2}$$

läßt sich eine Lösung von (1) als Grenzwert der rekursiv definierten Folge

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad x_o \text{ - beliebige Startnäherung} \tag{3}$$

bestimmen. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie die Konvergenz der Folge von Näherungslösungen (3) gegen diese exakte Lösung sind in diesem Fall gesichert.
Oft erweist es sich jedoch, daß die Folge (3) nur sehr langsam konvergiert (L nahe 1), oder daß die Bedingung (2) überhaupt nicht erfüllt ist. Im letzteren Fall ist es im allgemeinen schwierig, Aussagen über die Konvergenz der durch (3) definierten Folge oder über die Lösungsmenge von (1) zu gewinnen.
Wenn es gelingt, in B einen bezüglich φ invarianten Unterraum B_o zu finden,

$$\varphi(B_o) \subset B_o,$$

und zu zeigen, daß die gesuchte Lösung x zu B_o gehört, kann man (1) durch ein unter Umständen erheblich einfacher zu lösendes Fixpunktproblem

$$\varphi|_{B_o}(x) = x, \quad \varphi|_{B_o} : B_o \to B_o \tag{1'}$$

ersetzen.

In einer Reihe von Arbeiten führten Wiebeck und Metschkow das Problem der elasto-plastischen Profilbiegung auf eine Fixpunktgleichung vom Typ (1) zurück und diskutierten die Konvergenz der Folge (3) (/1/ - /4/). Für Profile mit Rechteckquerschnitt wurde gezeigt, daß (2) für größere Krümmungen verletzt ist, und die numerischen Ergebnisse weisen darauf hin, daß die Folge (3) in solchen Fällen divergiert. Gleiches ergab sich auch bei einigen anderen Querschnitten.

Im genannten Beispiel ist

$$B = C\,([z_{min}, z_{max}], R),$$

und x aus B ist die Distribution der plastischen Dehnungsanteile über der Profilhöhe. Die Funktion $\varphi : B \rightarrow B$ hat eine recht verwickelte Struktur, man kann jedoch eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit $B_o := \varphi(B)$ in B finden, die unter φ invariant ist und alle Lösungen von (1) enthält. Damit reduziert sich das Ausgangsproblem auf die Lösung einer eindimensionalen Fixpunktgleichung (1'), die auf ein Nullstellenproblem

$$f(\alpha) = 0 \tag{1"}$$

zurückgeführt werden kann. Hierbei ist α ein Parameter der Mannigfaltigkeit B_o.

Die Gleichung (1") wird im weiteren mit einem modifizierten Sekantenverfahren gelöst. Die speziellen Eigenschaften von f lassen auf Eindeutigkeit der Lösung und globale Konvergenz des Verfahrens schließen.

2. Biegung elasto-plastischer Profile

Unter gewissen physikalischen Voraussetzungen (/1/) verschwinden bei der reinen Profilbiegung sämtliche Komponenten des Deformationstensors bis auf $\varepsilon_{xx} =: \varepsilon$, wobei die x-Achse mit der Schwereachse des Profils zusammenfalle. Wenn die Biegung innerhalb der x-z-Ebene erfolgt, ist die nichtverschwindende Komponente eine lineare Funktion von z. Das nichtlineare Materialverhalten werde durch eine monoton nichtfallende, ungerade stetige Funktion

$$\sigma : R \rightarrow R$$

beschrieben. Im allgemeinen existiert ein Intervall $[-\varepsilon_o, \varepsilon_o]$, in dem σ homogen ist mit dem Anstieg E (Youngscher Modul). Im einfachsten Fall nimmt man an, σ sei für $\varepsilon > \varepsilon_o$ linear mit einem Anstieg $P \ll E$, z. B. $P = 0$ für ideal plastisches Material. Sonst kann σ auch in anderer geeigneter Weise an experimentelle Daten angepaßt werden. Wir setzen voraus, daß σ keine lineare Funktion ist.

Mittels σ und E definieren wir den plastischen Deformationsanteil

$$\varepsilon_p(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E} . \qquad (4)$$

Bevor wir die Funktion φ aus (1) für den Fall der Profilbiegung nach /1/ definieren, sei noch der geometrische Zusammenhang

$$\beta = K\,(1+\alpha) \qquad (5)$$

erwähnt, wobei K die Krümmung der Schwereachse und α und β Absolutglied bzw. Linearkoeffizient der linearen Funktion

$$\varepsilon = \alpha + \beta z \qquad (6)$$

bezeichnen. Für lineares σ oder für symmetrische Profile gilt $\alpha = 0$, woraus sich der bekannte Spezialfall $\varepsilon = Kz$ ergibt.

Die Berechnung des elasto-plastischen Spannungs- und Deformationszustandes wurde in /1/ auf die "Methode der elastischen Lösungen" Iljuschins zurückgeführt. In Anlehnung an die Bezeichnungen dieser Arbeit definieren wir für $x \in B$:

$$\begin{aligned} K_3(x) &= -E \int_{z_{min}}^{z_{max}} x(z)\, b(z)\, dz, \\ K_5(x) &= -E \int_{z_{min}}^{z_{max}} z\, x(z)\, b(z)\, dz, \end{aligned} \qquad (7)$$

wobei b(z) die Breite des Profils in der Höhe z ist. Weiter sei

$$Ma\,(u,v) = -\frac{KK_4}{K_1} u + v + KK_4 \qquad (8)$$

mit den Konstanten

$$K_1 = E \int_{z_{min}}^{z_{max}} b(z)\, dz,$$

$$K_4 = E \int_{z_{min}}^{z_{max}} z^2\, b(z)\, dz. \tag{9}$$

Nun sei

$$\alpha(u) = -\frac{1}{K_1} u, \quad \beta(u,v) = \frac{1}{K_4} (Ma(u,v) - v). \tag{10}$$

Jetzt können wir $\varphi : B \to B$ definieren durch

$$\varphi(x)(z) = \varepsilon_p(\alpha(K_3(x)) + \beta(K_3(x), K_4(x))z). \tag{11}$$

Die Funktion x repräsentiert hierbei die Verteilung der plastischen Dehnung über der Profilhöhe. In /1/ - /3/ wurde diese als Grenzwert der Folge (3) bestimmt, wobei als Startwert zunächst $x \equiv 0$ und für größere Krümmungen die Lösung aus dem jeweils letzten Lastschritt verwendet wurde.

3. Das neue Iterationsverfahren

Im folgenden untersuchen wir den Bildraum $B_o = \varphi(B)$ und die Abbildung $\varphi|_{B_o} : B_o \to B_o$. Dazu bemerken wir zunächst, daß sich die Berechnung von $\varphi(x)$ etwas vereinfachen läßt, denn es gilt (vgl. (5)

$$\beta = \frac{1}{K_4}\left(-\frac{KK_4}{K_1} u + v + KK_4 - v\right) = K - \frac{K}{K_1} u = K\left(1 - \frac{1}{K_1} u\right) = K(1+\alpha)$$

und folglich

$$\varphi(x)(z) = \varepsilon_p(\alpha(K_3(x)) + K(1+\alpha(K_3(x)))z).$$

Aus dieser Formel erkennt man die Gestalt von B_o

$$B_o = \left\{x \in B : \exists \alpha \in R\ \forall z \in [z_{min}, z_{max}]\ x(z) = \varepsilon_p(\alpha + K(1+\alpha)z)\right\}.$$

Es bietet sich an, B_o durch α zu parametrisieren:

$$X(\alpha)(z) = \varepsilon_p(\alpha + K(1+\alpha)z).$$

Für $x \not\equiv 0$ ist diese Parametrisierung auf Grund der Nichtlinearität von σ eineindeutig, für $x \equiv 0$ setzen wir $\alpha = 0$.
Mit dem so definierten $\mathcal{A} : B_o \longrightarrow R$, $X \circ \mathcal{A} = id_{B_o}$,
können wir zum Fixpunktproblem

$$\alpha = \mathcal{A}(\varphi(X(\alpha))) \qquad (12)$$

übergehen. Hierbei ist x dann und nur dann Fixpunkt von (3), wenn $\alpha = \mathcal{A}(x)$ Fixpunkt von (12) ist. Somit wird die Aufgabenstellung eindimensional.
Für die effektive Lösung des reduzierten Problems benutzen wir das folgende

<u>Lemma 1:</u> Ein Parameter α ist Fixpunkt von (12) genau dann, wenn

$$f(\alpha) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha + K(1+\alpha)z)b(z)\,dz = 0$$

gilt.

<u>Beweis:</u> Offenbar gilt $\mathcal{A}(\varphi(X(\alpha))) = \alpha(K_3(X(\alpha)))$, der Parameter α ist also genau dann Fixpunkt von (12), wenn er Fixpunkt von

$$\alpha = \alpha(K_3(X(\alpha))) \qquad (13)$$

ist. Unter Verwendung der Definitionen (10), $(7)_1$ und (4) für die Funktionen α, K_3 und ε_p erhalten wir

$$\alpha = -\frac{1}{K_1}\left[-E\int_{z_{min}}^{z_{max}} X(\alpha)\;b(z)\;dz\right],$$

$$= -\frac{1}{K_1}\left[-E\int_{z_{min}}^{z_{max}} \left[\alpha + K(1+\alpha)z - \frac{\sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)}{E}\right]b(z)dz\right],$$

$$= \frac{E}{K_1}\int_{z_{min}}^{z_{max}} [\alpha + K(1+\alpha)z]b(z)dz - \frac{1}{K_1}\int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)b(z)dz.$$

Nun ist aber $\int_{z_{min}}^{z_{max}} z\, b(z)\, dz = 0$ auf Grund der Wahl des Koordinatensystems, und nach $(9)_1$ ist $E \int_{z_{min}}^{z_{max}} b(z)dz = K_1$. Somit ist (13) äquivalent zu

$$\alpha = \alpha - \frac{1}{K_1} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)\; b(z)\; dz$$

und damit zu $f(\alpha) = 0$, w.z.b.w.

<u>Lemma 2:</u> Die Funktion f ist monoton wachsend.

<u>Beweis:</u> Es gilt $\alpha + K(1+\alpha)z = Kz + \alpha(1+Kz)$. Da $|Kz|$ aus geometrischen Gründen stets wesentlich kleiner als Eins bleibt, ist $\alpha + K(1+\alpha)z$ für jedes z eine streng monoton (linear) wachsende Funktion von α. Da σ nach Voraussetzung monoton wachsend ist, gilt dasselbe auch für

$$f(\alpha) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)\; b(z)\; dz.$$

<u>Lemma 3:</u> Es gelte $f(\alpha) = 0$, und σ sei in einem Intervall $[-\varepsilon_o, \varepsilon_o]$ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar. Dann ist f in einer Umgebung der Stelle α streng monoton wachsend.

<u>Beweis:</u> Aus $f(\alpha) = 0$ folgt, daß $\alpha+K(1+\alpha)z$ als Funktion von z im Intervall $[z_{min}, z_{max}]$ eine Nullstelle besitzt, in deren Umgebung der Integrand streng monoton wächst.

<u>Folgerung 1:</u> Das Ausgangsproblem (1) hat höchstens eine Lösung. Aus dem Beweis von Lemma 2 ersieht man ferner, daß der Integrand für genügend große (kleine) α für alle z positiv (negativ) wird.

<u>Folgerung 2:</u> Jedes der Probleme (1), (12), (13) hat eine eindeutig bestimmte Lösung.

4. Numerische Realisierung

Es bietet sich an, die Gleichung

$$f(\alpha) = 0 \tag{14}$$

mit einem modifizierten Sekantenverfahren zu lösen. Falls im Iterationsverlauf eine Verschlechterung der Funktionswerte eintritt, läßt sich auf Grund obengenannter Eigenschaften von f durch Dämpfung globale Konvergenz sichern. Dadurch entfällt die Notwendigkeit, die gewünschte Endkrümmung in Teillastschritten aufzubringen. Bei einer Reihe von Testrechnungen konvergierte das Verfahren stets recht schnell, obwohl die Startwerte fest vorgegeben waren. Weiterhin ist der Aufwand pro Iterationsschritt im Vergleich zum ursprünglichen Iterationsverfahren geringer (vgl. /5/). Eine detaillierte Programmbeschreibung sowie Beispielrechnungen sind ebenfalls in /5/ enthalten. Hier sei nur noch kurz auf eine für die Wahl der Abbruchschranke wichtige Abschätzung hingewiesen. Ziel der Untersuchung ist letztlich die Berechnung des Momentes

$$Ma = \int_{z_{min}}^{z_{max}} z\sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)b(z)\,dz.$$

Es sei nun $\tilde{\alpha}$ eine Näherung der Nullstelle α mit $|f(\tilde{\alpha})| < \delta$. Für den mit Hilfe von $\tilde{\alpha}$ berechneten Näherungswert

$$\tilde{Ma} = \int_{z_{min}}^{z_{max}} z\sigma(\tilde{\alpha}+K(1+\tilde{\alpha})z)b(z)\,dz$$

gilt

$$\tilde{Ma} = \int_{z_{min}}^{z_{max}} z(\sigma(\alpha+K(1+\alpha)z) + \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z))b(z)\,dz$$

$$= Ma + z_{min}\int_{z_{min}}^{z_o} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z)b(z)dz + z_{max}\int_{z_o}^{z_{max}} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z)b(z)dz$$

mit $z_o \in [z_{min}, z_{max}]$.

Somit erhält man

$$|\widetilde{Ma} - Ma| \leq \max\{-z_{min}, z_{max}\} \left(\left| \int_{z_{min}}^{z_o} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) b(z) dz \right| + \left| \int_{z_o}^{z_{max}} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) b(z) dz \right| \right).$$

Nun hat aber

$$\Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) := \sigma(\tilde{\alpha}+K(1+\tilde{\alpha})z) - \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)$$

auf Grund der vorausgesetzten Monotonie der Funktion σ und wegen $|K z|<1$ keinen Vorzeichenwechsel in $[z_{min}, z_{max}]$. Für $\tilde{\alpha} < \alpha$ gilt im gesamten Intervall $\Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) < 0$, für $\tilde{\alpha} > \alpha$ gilt $\Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) > 0$. Das erlaubt es, weiter abzuschätzen:

$$\begin{aligned} |\widetilde{Ma} - Ma| &\leq \max\{-z_{min}, z_{max}\} \left| \int_{z_{min}}^{z_{max}} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) b(z) dz \right| \\ &= \max\{-z_{min}, z_{max}\} |f(\tilde{\alpha}) - f(\alpha)| \\ &= \max\{-z_{min}, z_{max}\} |f(\tilde{\alpha})| < h \cdot \delta, \end{aligned} \tag{15}$$

wobei $h = z_{max} - z_{min}$ die Höhe des Profils bezeichnet.

Für die in /5/ untersuchten Profilhöhen ($\leq$ 1000 mm) und die Größenordnung der Momente ($> 10^5$ Nm) genügte auf Grund der Abschätzung (15) als Abbruchkriterium

$$|f(\tilde{\alpha})| < 100,$$

um einen relativen Fehler unter 0.1 % zu garantieren. Ungleichung (15) erlaubt also eine recht bequeme Beurteilung der Ergebnisse, da sie nicht auf den Fehler der Berechnung von $\tilde{\alpha}$, sondern nur auf das Residuum $f(\tilde{\alpha})$ zurückgreift. In /1/ wurde im Vergleich dazu als Abbruchkriterium

$$|x - \varphi(x)| < \varepsilon$$

verwendet, welches ohne zusätzliche Überlegungen keine Angaben über den Fehler bei der Berechnung von Ma gestattet.

5. Schlußbemerkung

Das hier vorgestellte Verfahren läßt sich auch physikalisch recht einleuchtend begründen, denn man erkennt in Gleichung (14) unschwer die Gleichgewichtsbedingung für die Längskraft. Es ging hier aber auch um den Nachweis der Äquivalenz des neuen und des alten Verfahrens, d. h. insbesondere darum, daß bei der Vereinfachung keine Lösungen verlorengehen. Darüber hinaus kann man auf ähnliche Art auch einige analoge Aufgaben lösen bzw. vereinfachen, etwa bei Wirken von zusätzlichen Längskräften. Abschließend muß darauf hingewiesen werden, daß man auf Grund der Eigenschaften des numerischen Verfahrens Momente für beliebige Krümmungen berechnen kann und somit Gefahr läuft, den Anwendungsbereich des physikalischen Modells zu verlassen.

Literatur

/1/ Wiebeck, E., und Metschkow, B.: Iterationsverfahren zur Berechnung der elastisch-plastischen Biegung von Profilen. Fertigungstechnik und Betrieb 26, 4 (1976)

/2/ Wiebeck, E., und Metschkow, B.: Zu einigen Erfahrungen bei der Behandlung elastisch-plastischer Probleme. Schriftenreihe IH für Seefahrt 4 (1977)

/3/ Wiebeck, E., und Metschkow, B.: Zu einigen Konvergenzproblemen bei der rechnerischen Erfassung physikalischer Nichtlinearitäten. Schiffbauforschung 17, 5/6 (1978)

/4/ Metschkow, B.: Zur Entwicklung von Berechnungsalgorithmen für die Erfassung physikalischer Nichtlinearitäten. Vortrag auf dem 3. wiss. Kolloquium der Abt. Math./Nat. der IHS Wismar am 3. und 4. 5. 1979

/5/ Flemmig, U.: Numerische Analyse der elasto-plastischen Profilbiegung. Jahresarbeit an der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock (1985)

eingegangen: 01. 06. 1985

Anschrift des Verfassers:

Dr. K. Frischmuth
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock