

## Mathematik II für Chemie

PROBEKLAUSUR

Gruppe B

27.07.2015

- Der Vektor  $\bar{u} \in \mathbb{R}^8$  hat als Komponente  $\bar{u}_i$  die  $i$ -te Fibonacci-Zahl. Jedem Vektor  $u \in \mathbb{R}^8$  wird der Vektor  $v \in \mathbb{R}^{10}$  zugeordnet, der als erste Komponente eine Null, dann alle Komponenten von  $u$  mit geradzahligem Index in aufsteigender Reihenfolge, dann eine 17 und schließlich die Komponenten mit ungeradzahligem Index in absteigender Reihenfolge enthält.
  - Welcher Vektor  $\bar{v}$  wird  $\bar{u}$  zugeordnet?
  - Ist die Zuordnung eine lineare Abbildung?
  - Schreiben Sie die Zuordnung mittels Matrix/Vektoroperationen!
- Ist die Abbildung  $F$  aus 1) surjektiv, injektiv oder bijektiv?  
Lösen Sie  $F(x) = (1, 2, 3, \dots, 10)^T$  klassisch und verallgemeinert!
- Bestimmen Sie die Niveaulinien von  $f(x) = \ln(x_1) + 2 \ln(x_2)$  und  $g(x) = 2x_1 + 3x_2$  für Vektoren  $x$  mit positiven Komponenten.  
Haben  $f$  oder  $g$  lokale Extrema in diesem Bereich?  
Bestimmen Sie das Maximum von  $f$  entlang der Strecke  $g(x) = 6, x_1, x_2 \geq 0$ .
- Gesucht sind die lineare und quadratische Näherung von  $f$  in der Extremstelle aus 3) und die Richtungsableitung dort von  $f$  in Richtung eines beliebigen Vektors  $v$ ,  $\|v\| > 0$ , aus dem Nullraum  $\ker g$ .
- Schreiben Sie die erste Ableitung als lineare Abbildung auf dem Raum der Polynome dritten Grades in sich selbst. Stellen Sie das charakteristische Polynom auf und geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren an!
- Man bestimme  $\alpha$  so, dass  $(3x^3 + 4y - \alpha y^3)dx + (4x + 9xy^2 - y^4)dy$  das vollständige Differential einer Funktion  $U(x, y)$  ist und berechne  $U(3, 4)$ , wenn  $U(1, 1) = 1$  gilt!
- Man berechne die Länge einer Windung der Spirale

$$x = t \cos(t), y = t \sin(t), t \in [0, 2\pi].$$