Universität Rostock
Institut für Mathematik
Prof. K. Frischmuth

Mathematik II für Chemie

PRÜFUNGSKLAUSUR – KOMMENTIERT **Gruppe A – B analog** 30.07.2015

1. Beschreiben Sie die lineare Hülle der Polynome

   $p_1(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = (x+2)(x-1)(x-2)$,

   $p_3(x) = (x+2)(x+1)(x-2)$, $p_4(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$

   und stellen Sie $q(x) = x^2 - x^3$ als Linearkombination von p_1, p_2, p_3 und p_4 dar!

   Offenbar sind alle p_j Polynome dritten Grades, es sind vier Stück, und sie sind linear unabhängig, also eine Basis – sie spannen den gesamten Vektorraum aller Polynome dritten Grades auf.

   Damit läßt sich auch das fragliche Polynom darstellen. Es hat bei $x = -2$ den Wert 12, alle Basispolynome haben den Wert Null – bis auf das erste: $p_1(-2) = -12$. Damit muss der erste Koeffizient -1 betragen.

   Die anderen findet man durch Einsetzen von -1, 1 bzw. 2 für x.

2. Unter Verwendung der Polynome aus 1) konstruiere man ein lineares Gleichungssystem $Mr = n$ wie folgt: Es sei $x_i = i - 2$, $n_i = q(x_i) - x_i^6$, und $M_{ij} = p_j(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots 4$, $j = 1, 2, 3, 4$.
   Man löse $Mr = n$ im Sinne der Methode der Kleinsten Quadrate!

   Offenbar ist q kein Polynom dritten Grades, n ist auch nicht im Bildraum von M, es muss nach Gauss das System der Normalgleichungen gelöst werden.

   Die Matrix M hat vier Spalten, eine für jedes Polynom, in jeder Spalte stehen die Werte, die sich durch Einsetzen von $x = -2, -1, 0, 1, 2$ ergeben.

   Es kommt häufig Null heraus – an den Stellen -2, -1, 1 und 2 sind jeweils drei der vier Polynome Null, weil sie einen entsprechenden Linearfaktor enhalten. Die Ausnahme ist $x = 0$, daher ist die dritte Zeile stärker gefüllt.

   Die Normalengleichungen sind zwar für Handrechnung immer unangenehm, aber man kann schnell eine Menge Nullen im Doppelpack erzeugen, so dass es doch machbar bleibt.

3. Bestimmen Sie die Niveaulinien von

   $f(x) = x_1x_2(1 - x_1x_2)$ und $g(x) = 2x_1 - 3x_2 + 1$

   für Vektoren x aus $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
   Haben f oder g lokale Extrema in diesem Bereich?
   Bestimmen Sie das Maximum von f entlang der Strecke $g(x) = 0$, $x \in D$.
   Die Funktion f ist eine Verkettung von $f = y(1 - y)$ und $y = x_1x_2$.

   Offenbar hat f ein lokales Maximum bei $y = 1/2$, alle Punkte auf der Hyperbel $x_1x_2 = 1/2$ liefern den Maximalwert $f = 0.25$.

   Die anderen Höhenlinien sind ebenfalls Hyperbeln, nur mit kleinerer Konstante. Dazu kommen die Ränder des Quadrats mit Niveau Null.

   Der Schnittpunkt der Hyperbel mit der Strecke ergibt sich durch Substitution.

4. Man berechne die quadratische Näherung T_q^* von f aus 3) an einer lokalen Extremstelle x^* und werte T_q^* im Punkt $\bar{x} = (0.5, 0.5)$ aus.
   Geben Sie Bild und Kern der Jacobi- und Hessematrix an!
   Die Jacobi-Matrix in lokalen Extremstellen verschwindet, also Kern ist der ganze Raum, Bild nur Nullvektor.

   Man beachte, dass f ein Polynom ist, die Berechnung der zweiten Ableitungen ist also elementar, die Maximalstelle kann man sich aussuchen – es kann die restringierte Lösungsstelle sein, muss aber nicht. Etwa $x_1 = x_2 = 1/2\sqrt{2}$ ist auch nicht übel.

   Die Hessematrix H ist singulär, der Nullraum ist tangential zur Hyperbel, im gewählten Punkt aufgespannt von $(1, -1)^T$, der Bildraum steht senkrecht dazu, er wird generiert von $(1, 1)^T$.

5. Es sei $\bar{M}$ die Teilmatrix von M aus 2), die durch Streichung der ersten Zeile entsteht. Stellen Sie das charakteristische Polynom auf und geben Sie einen Eigenwert und den dazugehörigen Eigenvektor an!
   Es empfiehlt sich, nach einer Zeile mit drei Nullen zu entwickeln, dann erhält man sofort einen Eigenwert und den Eigenvektor dazu. Einen Eigenvektor erspät man durch scharfes Hinsehen. (Oder man nutzt Computeralgebra . . .)

6. Man löse das System $\dot{u}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = u(t) - \exp(-3t)$, durch Entkopplung mittels Diagonalisierung der Systemmatrix!
   Die Summe wie die Differenz der Unbekannten Funktionen u und v erfüllen lineare entkoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die man sofort nach Ansatz lösen kann.

   Dann muss man noch aus $u + v$ und $u - v$ die gesuchten Größen selber wieder ausrechnen, *aber das ist auch schon alles.*

7. Man berechne die Länge einer Windung der Spirale

$$x = \exp(-t)\cos(t),\ y = \exp(-t)\sin(t),\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Nach trigonometrischem Pythagoras vereinfacht sich der Integrand so weit, dass die Aufgabe zur reinen Schreibübung verkommt.