Universität Rostock
Institut für Mathematik
Prof. K. Frischmuth

Mathematik II für Chemie

PRÜFUNGSKLAUSUR **Gruppe B** 30.07.2015

1. Beschreiben Sie die lineare Hülle der Polynome

   $p_1(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = (x+2)(x-1)(x-2)$,

   $p_3(x) = (x+2)(x+1)(x-2)$, $p_4(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$

   und stellen Sie $q(x) = x + x^3$ als Linearkombination von p_1, p_2, p_3 und p_4 dar!
2. Unter Verwendung der Polynome aus 1) konstruiere man ein lineares Gleichungssystem $Mr = n$ wie folgt: Es sei $x_i = i - 2$, $n_i = q(x_i) + x_i^6$, und $M_{ij} = p_j(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots 4$, $j = 1, 2, 3, 4$.

   Man löse $Mr = n$ im Sinne der Methode der Kleinsten Quadrate!
3. Bestimmen Sie die Niveaulinien von

   $f(x) = x_1x_2(1 - x_1x_2)$ und $g(x) = 3x_1 - 2x_2 - 1$

   für Vektoren x aus $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

   Haben f oder g lokale Extrema in diesem Bereich?

   Bestimmen Sie das Maximum von f entlang der Strecke $g(x) = 0$, $x \in D$.
4. Man berechne die quadratische Näherung T_q^* von f aus 3) an einer lokalen Extremstelle x^* und werte T_q^* im Punkt $\bar{x} = (1, 1)$ aus.

   Geben Sie Bild und Kern der Jacobi- und Hessematrix an!
5. Es sei $\bar{M}$ die Teilmatrix von M aus 2), die durch Streichung der letzten Zeile entsteht. Stellen Sie das charakteristische Polynom auf und geben Sie einen Eigenwert und den dazugehörigen Eigenvektor an!
6. Man löse das System $\dot{u}(t) = v(t)$, $\dot{v}(t) = -u(t) + 0.5\sin(2t)$, durch Entkopplung mittels Diagonalisierung der Systemmatrix!
7. Man berechne die Länge einer Windung der Spirale

$$x = \exp(t)\cos(t),\ y = \exp(t)\sin(t),\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Geben Sie alle Schritte des Lösungsweges und die benutzten Quellen und Hilfsmittel an!